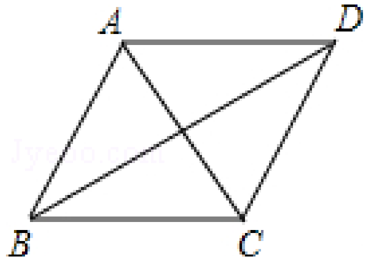
四边形

填空：

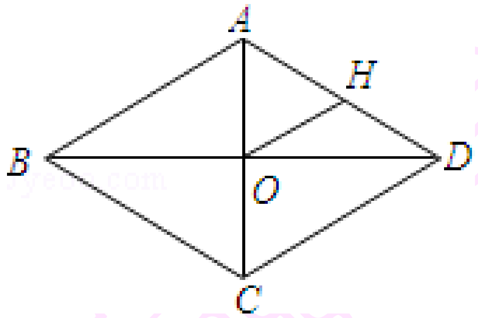
1. 如图，四边形 ABCD 中，AD∥BC，已知 BC=CD=AC=$2\sqrt{3}$，AB=$\sqrt{6}$，则 BD 的长为______．



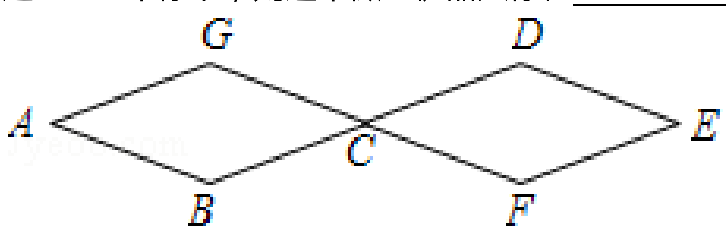
2．菱形的对角线长分别是 16cm、12cm，周长为______cm．

3．已知菱形的一个内角为 60°，一条对角线的长为 $2\sqrt{3}$，则另一条对角线的长为______．

4．如图所示，菱形 ABCD 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，H 为 AD 边中点，菱形 ABCD 的周长为 24，则 OH 的长等于______．

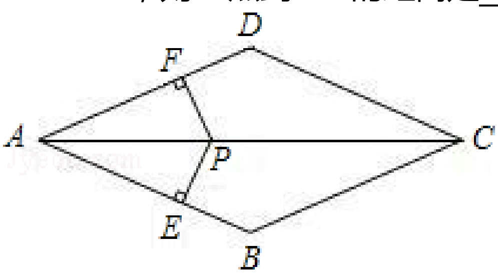


5．如图所示，两个全等菱形的边长为 1 米，一个微型机器人由 A 点开始按 A－＞B－＞C－＞D－＞E－＞F－＞C－＞G－＞A 的顺序沿菱形的边循环运动，行走 2009 米停下，则这个微型机器人停在______点．

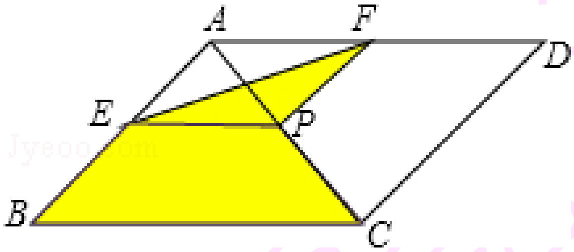


6．红丝带是关注艾滋病防治问题的国际性标志．将宽为 1cm 的红丝带交叉成 60°角重叠在一起（如图），则重叠四边形的面积为____________cm^2．

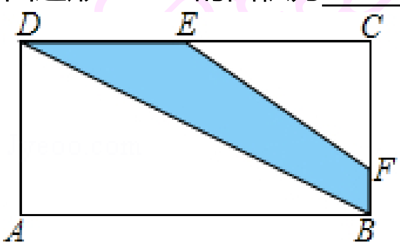
7．如图，P 为菱形 ABCD 的对角线上一点，PE⊥AB 于点 E，PF⊥AD 于点 F，PF=3cm，则 P 点到 AB 的距离是____________cm．



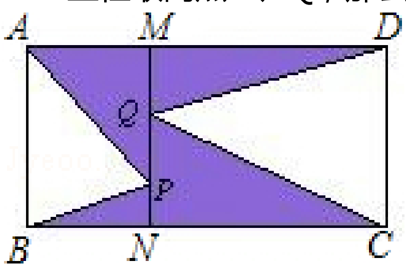
8．如图，菱形 ABCD 的对角线的长分别为 6 和 8，点 P 是对角线 AC 上的任意一点(点 P 不与点 A，C 重合)，且 PE∥BC 交 AB 于点 E，PF∥CD 交 AD 于点 F，则阴影部分的面积是____________．



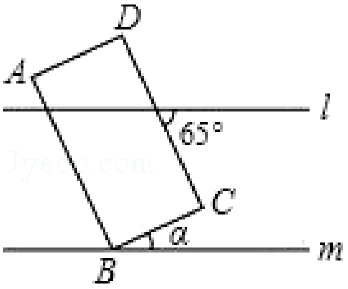
9．如图矩形 ABCD 中，AB=8cm，CB=4cm，E 是 DC 的中点，BF=$\frac{1}{4}$BC，则四边形 DBFE 的面积为____________cm^2．



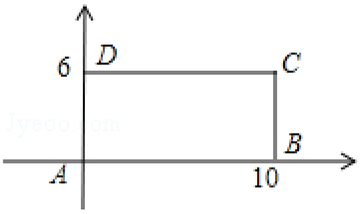
10．矩形 ABCD 中，AB=2，BC=5，MN∥AB 交 AD 于 M，交 BC 于 N，在 MN 上任取两点 P、Q，那么图中阴影部分的面积是____________．



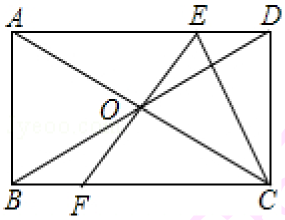
11．如图，l∥m，矩形 ABCD 的顶点 B 在直线 m 上，则∠α=____________度．



12．已知平面上四点 A（0，0），B（10，0），C（10，6），D（0，6），直线 $y=mx-3m+2$ 将四边形 ABCD 分成面积相等的两部分，则 m 的值为____________．



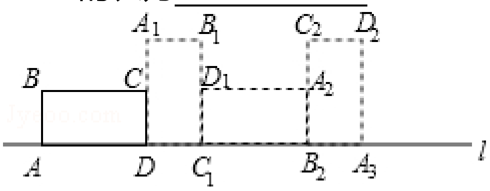
13．如图，矩形 ABCD 的两条线段交于点 O，过点 O 作 AC 的垂线 EF，分别交 AD、BC 于点 E、F，连接 CE，已知△CDE 的周长为 24cm，则矩形 ABCD 的周长是____________cm．



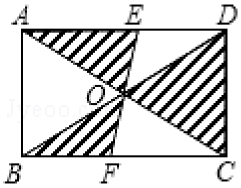
14．已知矩形 ABCD，分别为 AD 和 CD 为一边向矩形外作正三角形 ADE 和正三角形 CDF，连接 BE 和 BF，则$\frac{BE}{BF}$的值等于____________．

15．一个大长方体是由四个完全一样的小长方体拼成的，如果每个小长方体的长、宽、高分别是 3，1，1，那么这个大长方体的表面积可能有____________种不同的值，其中最小值为____________．

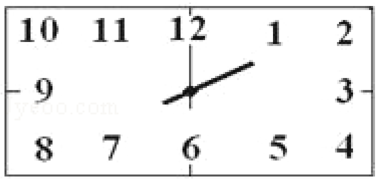
16．如图，将矩形 ABCD 在直线 l 上按顺时针方向无滑动翻滚，可依次得到矩形 $A_1B_1C_1D$，矩形 $A_2B_2C_1D_1$，矩形 $A_3B_2C_2D_2$，…，若 AB=1，BC=2，那么 AA_{12} 的长为____________．



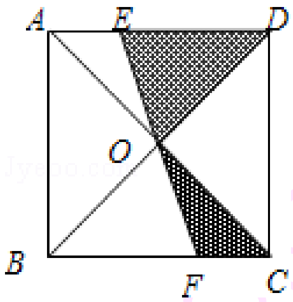
17．如图，矩形 ABCD 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O，过点 O 的直线分别交 AD 和 BC 于点 E、F，AB=2，BC=3，则图中阴影部分的面积为____________．



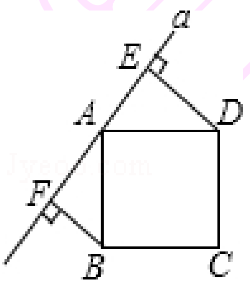
18．如图为长方形时钟钟面示意图，时钟的中心在长方形对角线的交点上，长方形的宽为 20 厘米，钟面数字 2 在长方形的顶点处，则长方形的长为________厘米．



19．如图，边长为 2 的正方形 ABCD 的对角线相交于点 O，过点 O 的直线分别交 AD、BC 于 E、F，则阴影部分的面积是____________．

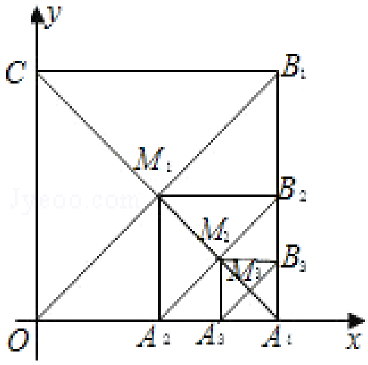


20.如图所示，直线 a 经过正方形 ABCD 的顶点 A，分别过顶点 B、D 作 DE⊥a 于点 E、BF⊥a 于点 F，若 DE=4，BF=3，则 EF 的长为____________．



21．如图，在平面直角坐标系中，边长为 1 的正方形 OA_1B_1C 的对角线 A_1C 和 OB_1 交于点 M_1；以 M_1A_1 为对角线作第二个正方形 $A_2A_1B_2M_1$，对角线 A_1M_1 和 A_2B_2 交于点 M_2；以 M_2A_1 为对角线作第三个正方形 $A_3A_1B_3M_2$，对角线 A_1M_2

和 A_3B_3 交于点 M_3；…，依此类推，这样作的第 n 个正方形对角线交点 M_n 的坐标为____________．



22．把三张大小相同的正方形卡片 A，B，C 叠放在一个底面为正方形的盒底上，底面未被卡片覆盖的部分用阴影表示．若按图 1 摆放时，阴影部分的面积为 S_1；若按图 2 摆放时，阴影部分的面积为 S_2，则 S_1____________S_2（填"＞"、"＜"或"＝"）．

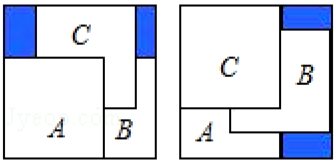
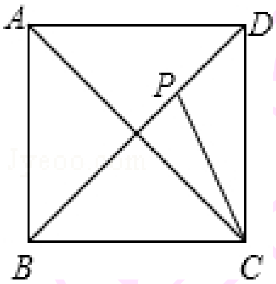
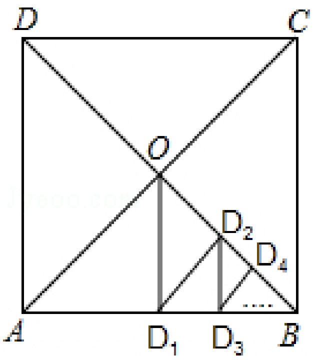


图 1　　图 2

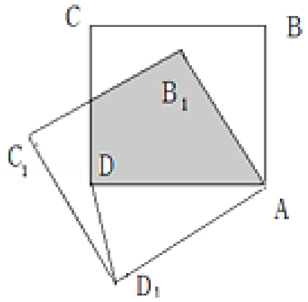
23．如图，已知 P 是正方形 ABCD 对角线 BD 上一点，且 BP=BC，则∠ACP 度数是____________度．



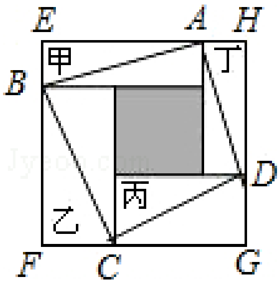
24．如图，正方形 ABCD 的边长为 $16\sqrt{2}$cm，对角线 AC，BD 相交于点 O，过 O 作 $OD_1\perp AB$ 于 D_1，过 D_1 作 $D_1D_2\perp BD$ 于点 D_2，过 D_2 作 $D_2D_3\perp AB$ 于 D_3，…，依此类推．其中的 $OD_1+D_2D_3+D_4D_5+D_6D_7=$____________cm．



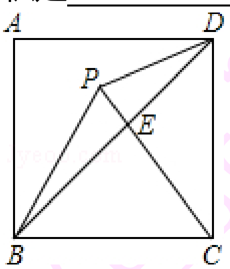
25 如图，把边长为 1 的正方形 ABCD 绕顶点 A 逆时针旋转 30°到正方形 AB′C′D′，则它们的公共部分的面积等于____________.



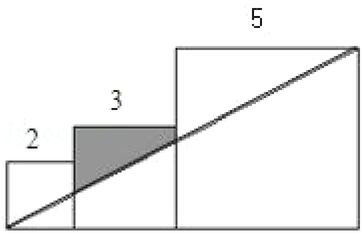
26．如图所示，甲、乙、丙、丁四个长方形拼成正方形 EFGH，中间阴影为正方形．已知甲、乙、丙、丁四个长方形面积的和是 32cm²，四边形 ABCD 的面积是 20cm²，则甲、乙、丙、丁四个长方形周长的总和为____________cm．



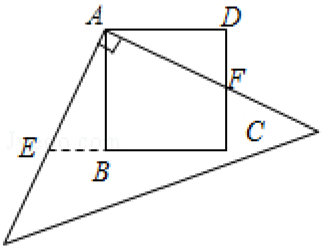
27．如图，已知正方形 ABCD 的边长为 2，△BPC 是等边三角形，则△CDP 的面积是____________；△BPD 的面积是____________．



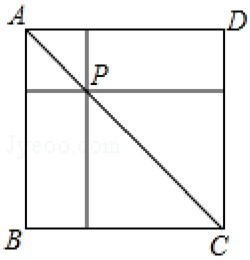
28．已知三个边长分别为 2、3、5 的正方形如图排列，则图中阴影部分面积为____________．



29．如图，有一块边长为 4 的正方形塑料模板 ABCD，将一块足够大的直角三角板的直角顶点落在 A 点，两条直角边分别与 CD 交于点 F，与 CB 延长线交于点 E．则四边形 AECF 的面积是____________．

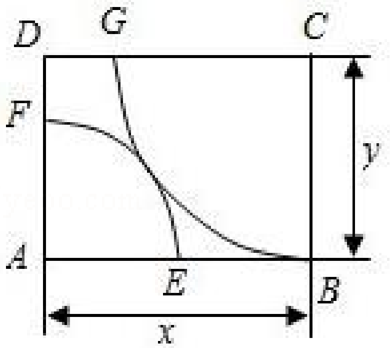


30．如图，正方形 ABCD 中，AB=1，点 P 是对角线 AC 上的一点，分别以 AP、PC 为对角线作正方形，则两个小正方形的周长的和是____________．



解答：

1．如图所示，矩形 ABCD 的周长为 14cm，E 为 AB 的中点，以 A 为圆心，AE 长为半径画弧交 AD 于点 F．以 C 为圆心，CB 长为半径画弧交 CD 于点 G．设 AB=xcm，BC=ycm，当 DF=DG 时，求 x，y 的值．

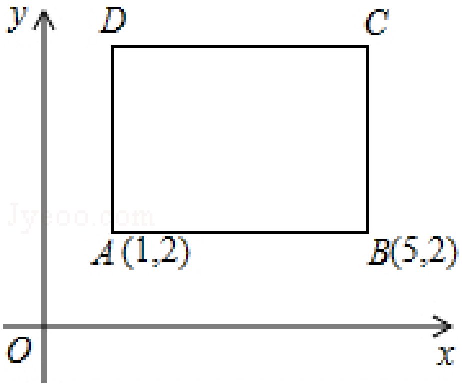


2．如图，四边形 ABCD 是一正方形，已知 A（1，2），B（5，2）

（1）求点 C，D 的坐标；

（2）若一次函数 $y=kx-2$（$k\neq0$）的图象过 C 点，求 k 的值．

（3）若 $y=kx-2$ 的直线与 x 轴、y 轴分别交于 M，N 两点，且△OMN 的面积等于 2，求 k 的值．



3．如图，正方形 ABCD 的边长为 2cm，在对称中心 O 处有一钉子．动点 P，Q 同时从点 A 出发，点 P 沿 A⇒B⇒C 方向以每秒 2cm 的速度运动，到点 C 停止，点 Q 沿 A⇒D 方向以每秒 1cm 的速度运动，到点 D 停止．P，Q 两点用一条可伸缩的细橡皮筋连接，设 x 秒后橡皮筋扫过的面积为 ycm^2．

（1）当 0≤x≤1 时，求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）当橡皮筋刚好触及钉子时，求 x 值；

（3）当 1≤x≤2 时，求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出橡皮筋从触及钉子到运动停止时∠POQ 的变化范围；

（4）当 0≤x≤2 时，请在给出的直角坐标系中画出 y 与 x 之间的函数图象．

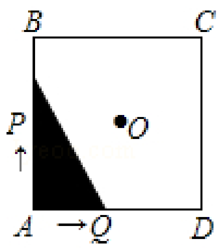


图1

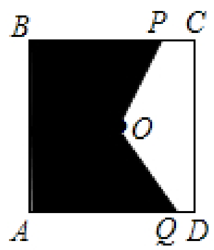


图2

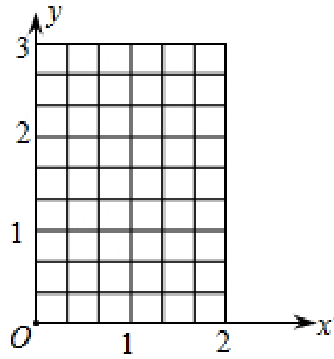
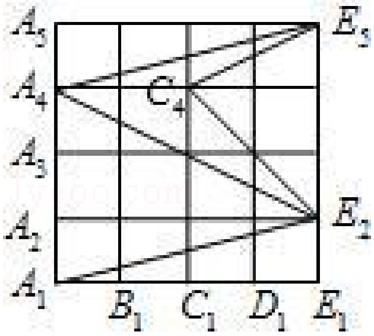


图3

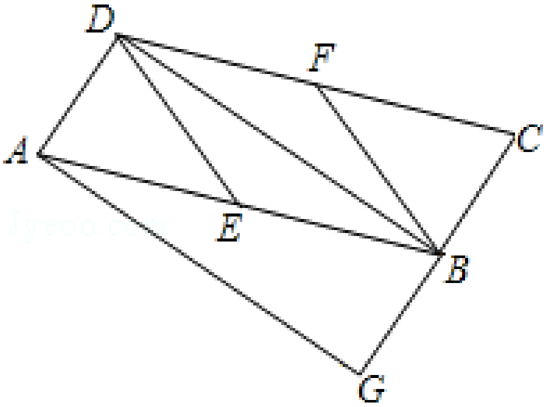
4．如图，正方形网格的每一个小正方形的边长都是 1，试求 $\angle A_1E_2A_2+\angle A_4E_2C_4+\angle A_4E_5C_4$ 的度数．



5．已知：如图，在▱ABCD 中，E、F 分别为边 AB、CD 的中点，BD 是对角线，AG∥DB 交 CB 的延长线于 G．

（1）求证：△ADE≌△CBF；

（2）若四边形 BEDF 是菱形，则四边形 AGBD 是什么特殊四边形？并证明你的结论．



6．△ABC 是等边三角形，点 D 是射线 BC 上的一个动点（点 D 不与点 B、C 重合），△ADE 是以 AD 为边的等边三角形，过点 E 作 BC 的平行线，分别交射线 AB、AC 于点 F、G，连接 BE．

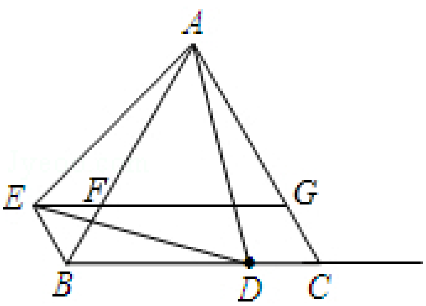
（1）如图（a）所示，当点 D 在线段 BC 上时．

①求证：△AEB≌△ADC；

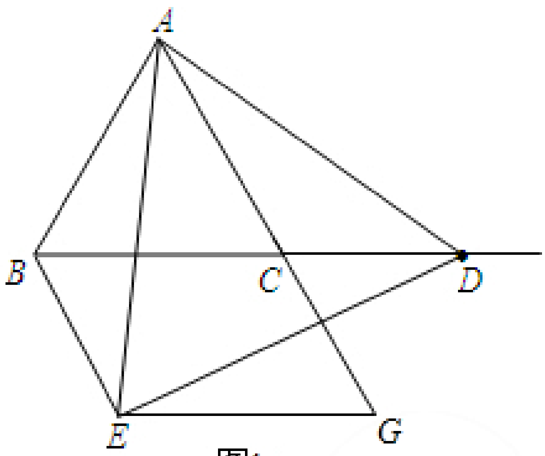
②探究四边形 BCGE 是怎样特殊的四边形？并说明理由；

（2）如图（b）所示，当点 D 在 BC 的延长线上时，直接写出（1）中的两个结论是否成立；

（3）在（2）的情况下，当点 D 运动到什么位置时，四边形 BCGE 是菱形？并说明理由．



图a



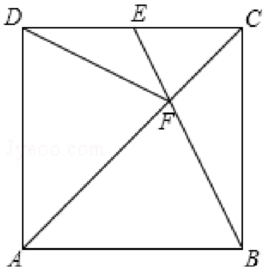
图b

7．如图，在正方形 ABCD 中，E 是 CD 边的中点，AC 与 BE 相交于点 F，连接 DF．

（1）在不增加点和线的前提下，直接写出图中所有的全等三角形；

（2）连接 AE，试判断 AE 与 DF 的位置关系，并证明你的结论；

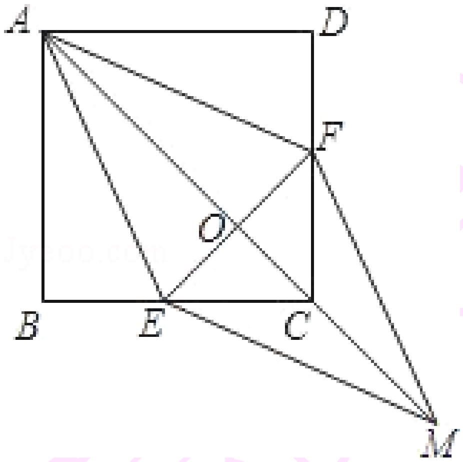
（3）延长 DF 交 BC 于点 M，试判断 BM 与 MC 的数量关系．（直接写出结论）



8．已知：如图，在正方形 ABCD 中，点 E、F 分别在 BC 和 CD 上，AE=AF．

（1）求证：BE=DF；

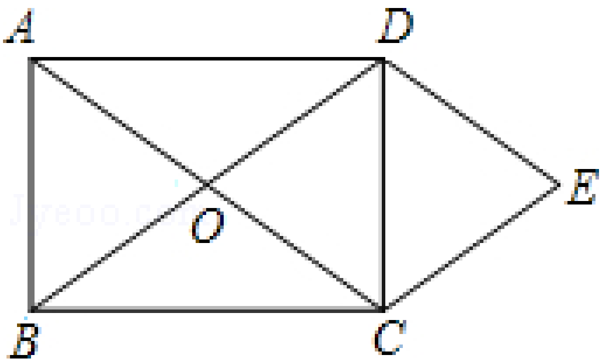
（2）连接 AC 交 EF 于点 O，延长 OC 至点 M，使 OM=OA，连接 EM，FM，判断四边形 AEMF 是什么特殊四边形？并证明你的结论．



9．如图，O 为矩形 ABCD 对角线的交点，DE∥AC，CE∥BD．

（1）试判断四边形 OCED 的形状，并说明理由；

（2）若 AB=6，BC=8，求四边形 OCED 的面积．

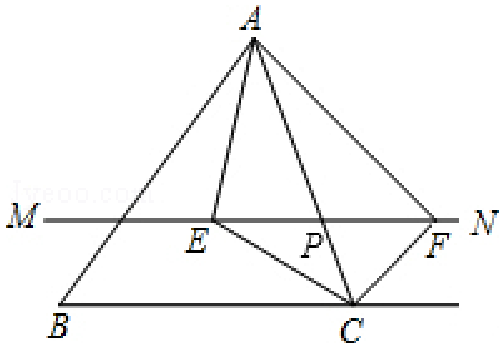


10．如图，△ABC 中，点 P 是边 AC 上的一个动点，过 P 作直线 MN∥BC，设 MN 交∠BCA 的平分线于点 E，交∠BCA 的外角平分线于点 F．

（1）求证：PE=PF；

（2）当点 P 在边 AC 上运动时，四边形 AECF 可能是矩形吗？说明理由；

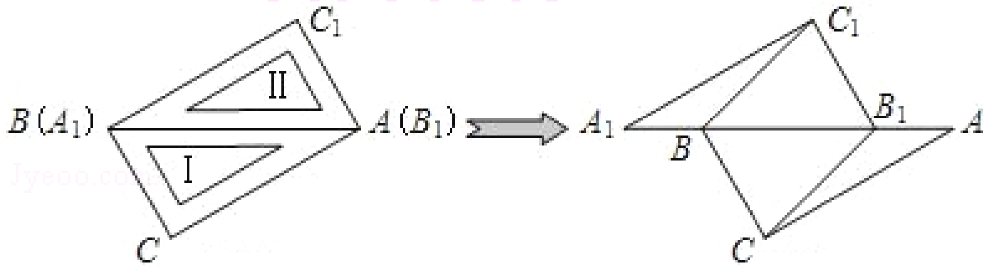
（3）若在 AC 边上存在点 P，使四边形 AECF 是正方形，且$\frac{AP}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．求此时∠BAC 的大小．



11．两块完全相同的三角板Ⅰ（△ABC）和Ⅱ（$\triangle A_1B_1C_1$）如图①放置在同一平面上（$\angle C=\angle C_1=90°$，$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1=60°$），斜边重合．若三角板Ⅱ不动，三角板Ⅰ在三角板Ⅱ所在的平面上向右滑动，图②是滑动过程中的一个位置．

（1）在图②中，连接 BC_1、B_1C，求证：$\triangle A_1BC_1\cong\triangle AB_1C$；

（2）三角板Ⅰ滑到什么位置（点 B_1 落在 AB 边的什么位置）时，四边形 BCB_1C_1 是菱形？说明理由．

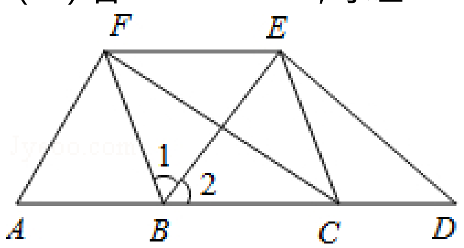


图①　　　　图②

12．如图，AD∥FE，点 B、C 在 AD 上，∠1=∠2，BF=BC．

（1）求证：四边形 BCEF 是菱形；

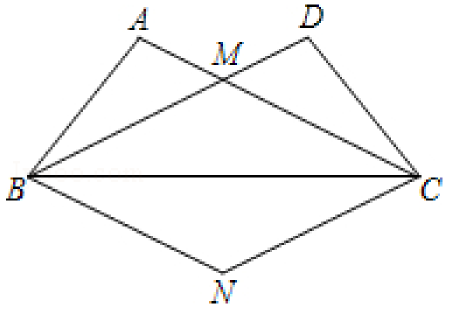
（2）若 AB=BC=CD，求证：△ACF≌△BDE．



13．如图，在△ABC 和△DCB 中，AB=DC，AC=DB，AC 与 DB 交于点 M．

（1）求证：△ABC≌△DCB；

（2）过点 C 作 CN∥BD，过点 B 作 BN∥AC，CN 与 BN 交于点 N，试判断线段 BN 与 CN 的数量关系，并证明你的结论．



14．如图，在平行四边形 ABCD 中．

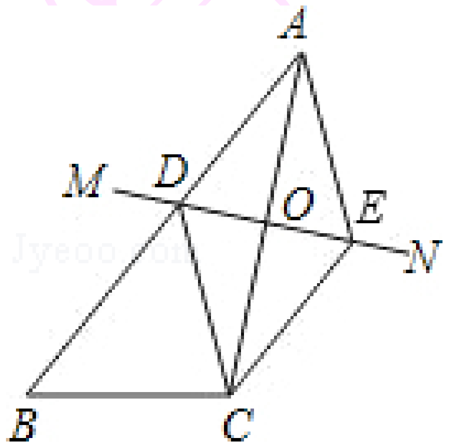
（1）尺规作图（不写作法，保留作图痕迹）：作∠ABC 的平分线 BE 交 AD 于 E；在线段 BC 上截取 CF=DE；连接 EF．

（2）求证：四边形 ABFE 是菱形．

15．如图，△ABC 中，AC 的垂直平分线 MN 交 AB 于点 D，交 AC 于点 O，CE∥AB 交 MN 于 E，连接 AE、CD．

（1）求证：AD=CE；

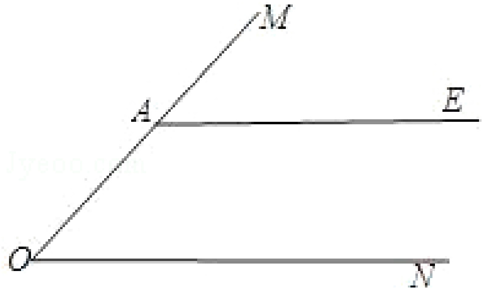
（2）填空：四边形 ADCE 的形状是____________．



16．如图，A 是∠MON 边 OM 上一点，AE∥ON．

（1）在图中作∠MON 的角平分线 OB，交 AE 于点 B；（要求：尺规作图，保留作图痕迹，不写作法和证明）

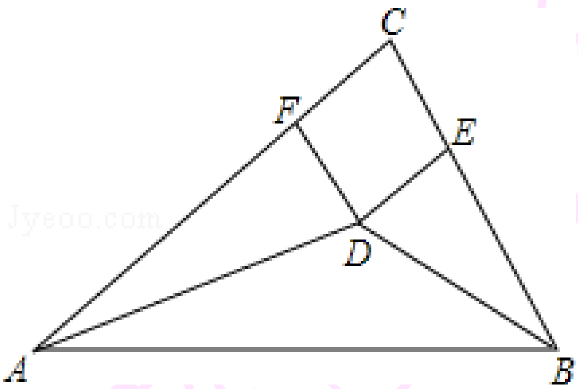
（2）在（1）中，过点 A 画 OB 的垂线，垂足为点 D，交 ON 于点 C，连接 CB，将图形补充完整，并证明四边形 OABC 是菱形．



17．如图，在△ABC 中，∠A，∠B 的平分线交于点 D，DE∥AC 交 BC 于点 E，DF∥BC 交 AC 于点 F．

（1）点 D 是△ABC 的____________心；

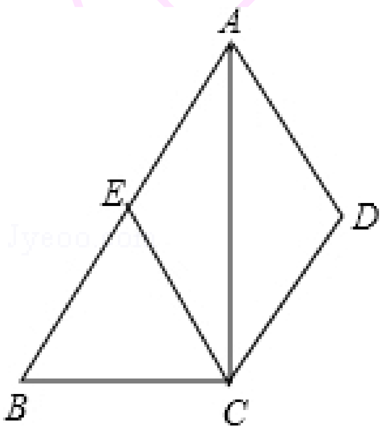
（2）求证：四边形 DECF 为菱形．



18．如图，四边形 ABCD 中，AB∥CD，AC 平分∠BAD，CE∥AD 交 AB 于 E．

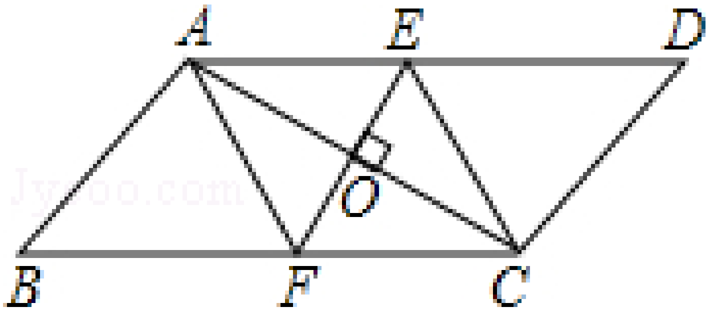
（1）求证：四边形 AECD 是菱形；

（2）若点 E 是 AB 的中点，试判断△ABC 的形状，并说明理由．



19．已知：如图，平行四边形 ABCD 的对角线 AC 的垂直平分线与边 AD、BC 分别相交于点 E、F．

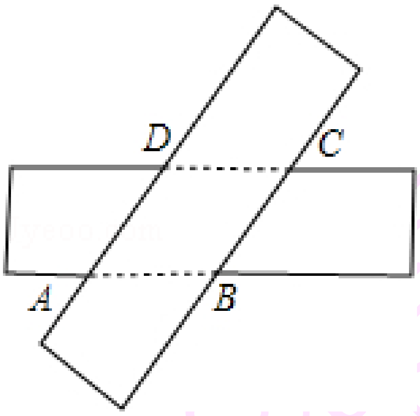
求证：四边形 AFCE 是菱形．



20．将两张宽度相等的矩形纸片叠放在一起得到如图所示的四边形 ABCD．

（1）求证：四边形 ABCD 是菱形；

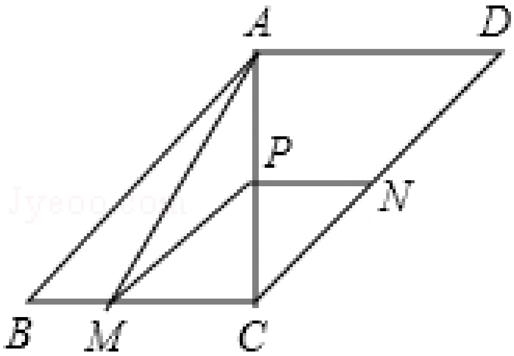
（2）如果两张矩形纸片的长都是 8，宽都是 2．那么菱形 ABCD 的周长是否存在最大值或最小值？如果存在，请求出来；如果不存在，请简要说明理由．



21．如图，在▱ABCD 中，对角线 AC⊥BC，AC=BC=2，动点 P 从点 A 出发沿 AC 向终点 C 移动，过点 P 分别作 PM∥AB 交 BC 于 M，PN∥AD 交 DC 于 N．连接 AM．设 AP=x

（1）四边形 PMCN 的形状有可能是菱形吗？请说明理由；

（2）当 x 为何值时，四边形 PMCN 的面积与△ABM 的面积相等？

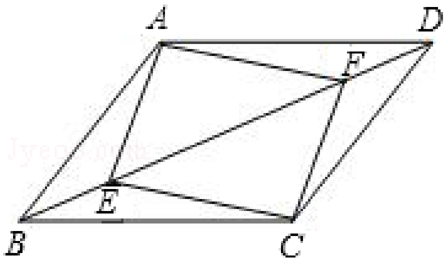


22．如图所示，在四边形 ABCD 中，点 E、F 是对角线 BD 上的两点，且 BE=FD．

（1）若四边形 AECF 是平行四边形，求证：四边形 ABCD 是平行四边形；

（2）若四边形 AECF 是菱形，那么四边形 ABCD 也是菱形吗？为什么？

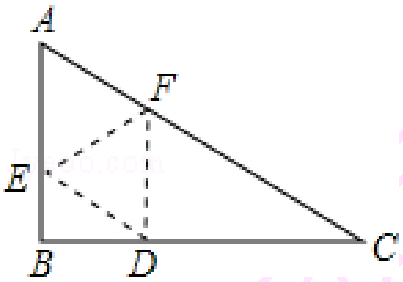
（3）若四边形 AECF 是矩形，试判断四边形 ABCD 是否为矩形，不必写理由．



23．如图所示，在 Rt△ABC 中，∠A=60°，点 E、F 分别在 AB、AC 上，沿 EF 对折，使 A 落在 BC 上的 D 处，且 FD⊥BC．

（1）确定点 E 在 AB 上和点 F 在 AC 上的位置；

（2）求证：四边形 AEDF 为菱形．

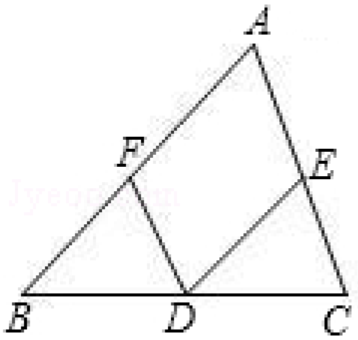


24．如图，在△ABC 中，D 为 BC 边的中点，过 D 点分别作 DE∥AB 交 AC 于点 E，DF∥AC 交 AB 于点 F．

（1）证明：△BDF≌△DCE；

（2）如果给△ABC 添加一个条件，使四边形 AFDE 成为菱形，则该条是__________；如果给△ABC 添加一个条件，使四边形 AFDE 成为矩形，则该条件是__________．

（均不再增添辅助线）请选择一个结论进行证明．

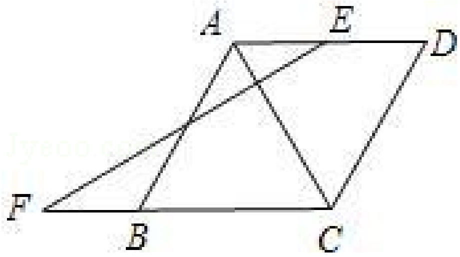


25．如图，四边形 ABCD 中，AD∥BC，AD=DC=BC，过 AD 的中点 E 作 AC 的垂线，交 CB 的延长线于 F．

求证：

（1）四边形 ABCD 是菱形．

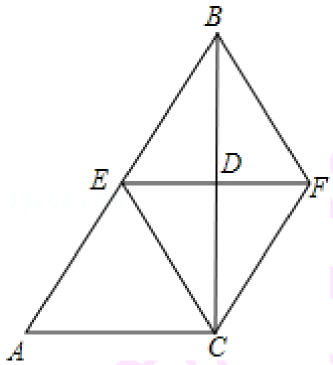
（2）BF=DE．



26．如图，在△ABC 中，∠ACB=90°，BC 的垂直平分线 EF 交 BC 于 D，交 AB 于 E，且 CF=BE．

（1）求证：四边形 BECF 是菱形；

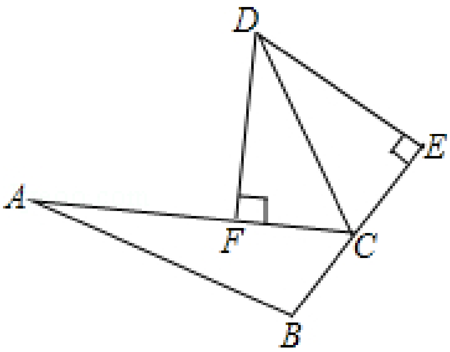
（2）当∠A 的大小满足什么条件时，菱形 BECF 是正方形？回答并证明你的结论．



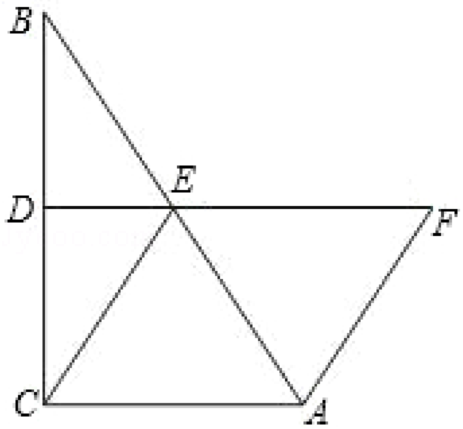
27．如图，D 是△ABC 外角∠ACE 的平分线上一点，DF⊥AC 于 F，DE⊥BC 交延长线于 E．

（1）求证：CE=CF；

（2）找一点 D′，使得 DFD′E 是菱形，请你画出草图，并简要叙述 D′的位置．



28．如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，∠BAC=60°，DE 垂直平分 BC，垂足为 D，交 AB 于点 E．又点 F 在 DE 的延长线上，且 AF=CE．求证：四边形 ACEF 是菱形．



29．(1) 如图 1，在正方形 ABCD 中，M 是 BC 边 (不含端点 B、C) 上任意一点，P 是 BC 延长线上一点，N 是∠DCP 的平分线上一点．若∠AMN=90°，求证：AM=MN．

下面给出一种证明的思路，你可以按这一思路证明，也可以选择另外的方法证明．

证明：在边 AB 上截取 AE=MC，连接 ME．正方形 ABCD 中，∠B=∠BCD=90°，AB=BC．∴∠NMC=180°﹣∠AMN﹣∠AMB=180°﹣∠B﹣∠AMB=∠MAB=∠MAE．

(下面请你完成余下的证明过程)

(2) 若将 (1) 中的"正方形 ABCD"改为"正三角形 ABC"(如图 2)，N 是∠ACP 的平分线上一点，则∠AMN=60°时，结论 AM=MN 是否还成立？请说明理由．

(3) 若将 (1) 中的"正方形 ABCD"改为"正 n 边形 ABCD…X，请你作出猜想：当∠AMN=____________时，结论 AM=MN 仍然成立．(直接写出答案，不需要证明)

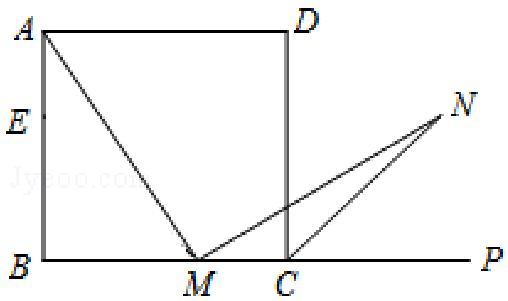


图 1

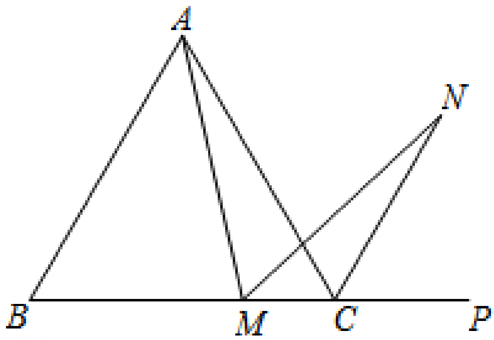
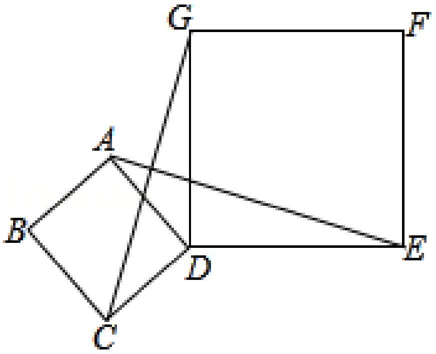


图 2

30．如图，四边形 ABCD、DEFG 都是正方形，连接 AE，CG．

（1）求证：AE=CG；

（2）观察图形，猜想 AE 与 CG 之间的位置关系，并证明你的猜想．



31．课题：两个重叠的正多边形，其中的一个绕某一顶点旋转所形成的有关问题．

实验与论证：

设旋转角$\angle A_1A_0B_1=\alpha$（$\alpha<\angle A_1A_0A_2$），θ_3、θ_4、θ_5、θ_6所表示的角如图所示．

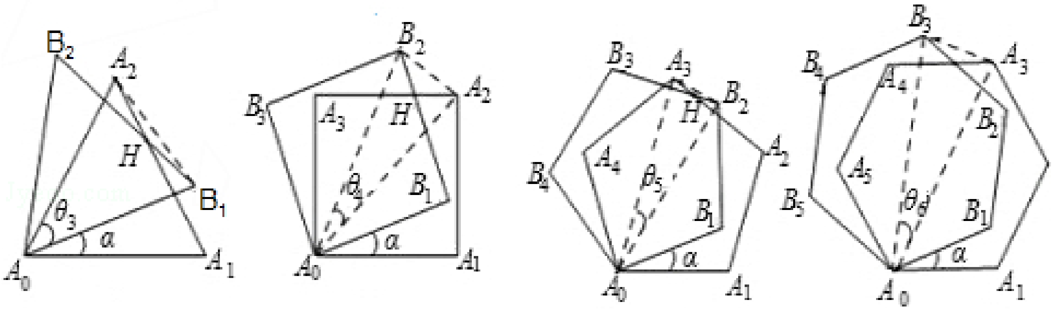


图1　　图2　　图3　　图4

（1）用含 α 的式子表示角的度数：θ_3=____________，θ_4=____________，θ_5=____________；

（2）图 1 - 图 4 中，连接 A_0H 时，在不添加其他辅助线的情况下，是否存在与直线 A_0H 垂直且被它平分的线段？若存在，请选择其中的一个图给出证明；若不存在，请说明理由；

归纳与猜想：

设正 n 边形 $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}$与正 n 边形 $A_0B_1B_2\ldots B_{n-1}$重合（其中，A_1与B_1重合），现将正多边形 $A_0B_1B_2\ldots B_{n-1}$绕顶点 A_0 逆时针旋转 α（$0°<\alpha<\frac{180°}{n}$）；

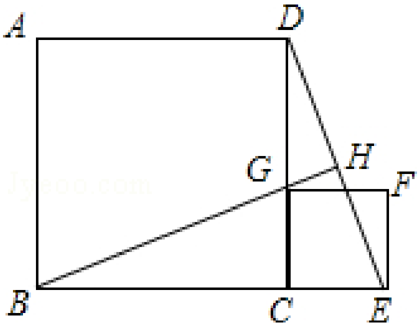
（3）设 θ_n与上述“θ_3、θ_4、…”的意义一样，请直接写出 θ_n的度数；

（4）试猜想在正 n 边形的情形下，是否存在与直线 A_0H 垂直且被它平分的线段？若存在，请将这条线段用相应的顶点字母表示出来（不要求证明）；若不存在，请说明理由．

32．如图所示，正方形 ABCD 的边长为 1，G 为 CD 边上的一个动点（点 G 与 C、D 不重合），以 CG 为一边向正方形 ABCD 外作正方形 GCEF，连接 DE 交 BG 的延长线于 H．

（1）求证：①△BCG≌△DCE；②BH⊥DE．

（2）试问当点 G 运动到什么位置时，BH 垂直平分 DE？请说明理由．



33．阅读材料：

如图，△ABC 中，AB=AC，P 为底边 BC 上任意一点，点 P 到两腰的距离分别为 r_1，r_2，腰上的高为 h，连接 AP，则 $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}=S_{\triangle ABC}$，即：$\frac{1}{2}AB\bullet r_1+\frac{1}{2}AC\bullet r_2=\frac{1}{2}AC\bullet h$，$\therefore r_1+r_2=h$（定值）．

（1）理解与应用：

如图，在边长为 3 的正方形 ABCD 中，点 E 为对角线 BD 上的一点，且 BE=BC，F 为 CE 上一点，FM⊥BC 于 M，FN⊥BD 于 N，试利用上述结论求出 FM+FN 的长．

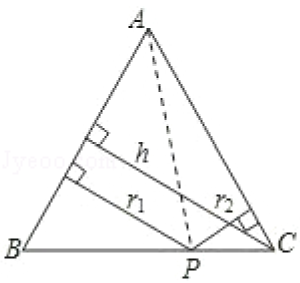
（2）类比与推理：

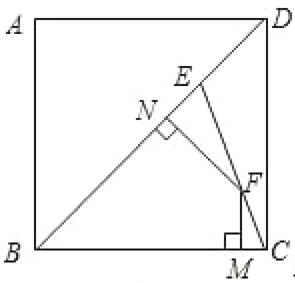
如果把“等腰三角形”改成“等边三角形”，那么 P 的位置可以由“在底边上任一点”放宽为“在三角形内任一点”，即：

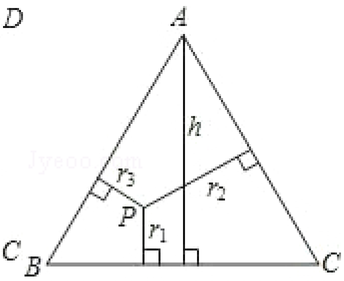
已知等边△ABC 内任意一点 P 到各边的距离分别为 r_1，r_2，r_3，等边△ABC 的高为 h，试证明 $r_1+r_2+r_3=h$（定值）．

（3）拓展与延伸：

若正 n 边形 $A_1A_2\ldots A_n$，内部任意一点 P 到各边的距离为 $r_1r_2\ldots r_n$，请问 $r_1+r_2+\ldots+r_n$ 是否为定值？如果是，请合理猜测出这个定值．







34．如图 1，已知矩形 ABED，点 C 是边 DE 的中点，且 AB=2AD．

（1）判断△ABC 的形状，并说明理由；

（2）保持图 1 中△ABC 固定不变，绕点 C 旋转 DE 所在的直线 MN 到图 2 中（当垂线段 AD、BE 在直线 MN 的同侧），试探究线段 AD、BE、DE 长度之间有什么关系？并给予证明；

（3）保持图 2 中△ABC 固定不变，继续绕点 C 旋转 DE 所在的直线 MN 到图 3 中的位置（当垂线段 AD、BE 在直线 MN 的异侧）．试探究线段 AD、BE、DE 长度之间有什么关系？并给予证

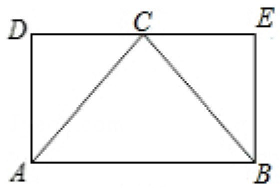


图 1

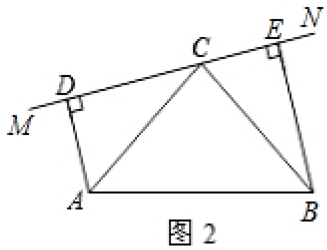


图 2

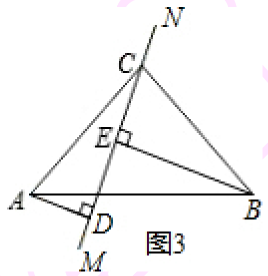


图3

明．

35．如图 1，在正方形 ABCD 中，E 是 AB 上一点，F 是 AD 延长线上一点，且 DF=BE．

（1）求证：CE=CF；

（2）在图 1 中，若 G 在 AD 上，且∠GCE=45°，则 GE=BE+GD 成立吗？为什么？

（3）运用（1）（2）解答中所积累的经验和知识，完成下题：

如图 2，在直角梯形 ABCD 中，AD∥BC（BC＞AD），∠B=90°，AB=BC=12，E 是 AB 上一点，且∠DCE=45°，BE=4，求 DE 的长．

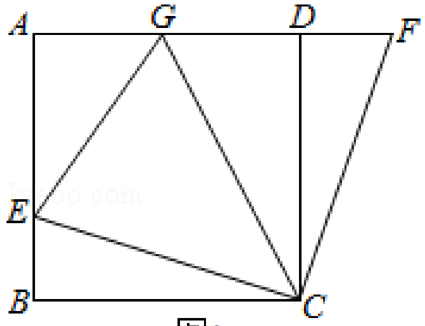


图1

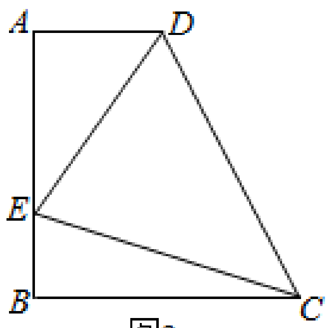


图2

36 .如图所示 ,在△ABC 中 ,分别以 AB、AC、BC 为边在 BC 的同侧作等边△ABD，等边△ACE、等边△BCF．

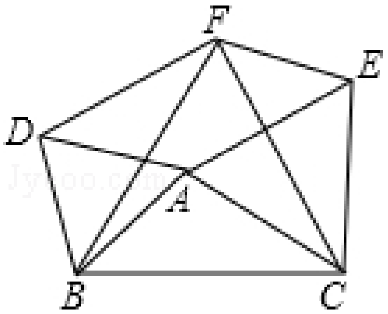
（1）求证：四边形 DAEF 是平行四边形；

（2）探究下列问题：(只填满足的条件，不需证明)

①当△ABC 满足____________条件时，四边形 DAEF 是矩形；

②当△ABC 满足____________条件时，四边形 DAEF 是菱形；

③当△ABC 满足____________条件时，以 D、A、E、F 为顶点的四边形不存在．



37．在菱形 ABCD 中，∠B=60°，AC 是对角线．

（1）如图 1，点 E、F 分别在边 BC、CD 上，且 BE=CF．

①求证：△ABE≌△ACF；

②求证：△AEF 是等边三角形．

（2）若点 E 在 BC 的延长线上，在直线 CD 上是否存在点 F，使△AEF 是等边三角形？请证明你的结论（图 2 备用）.

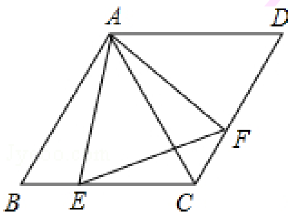


图1

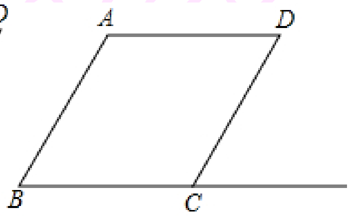


图2

38．已知：△ABC 的高 AD 所在直线与高 BE 所在直线相交于点 F．

（1）如图 1，若△ABC 为锐角三角形，且∠ABC=45°，过点 F 作 FG∥BC，交直线 AB 于点 G，求证：FG+DC=AD；

（2）如图 2，若∠ABC=135°，过点 F 作 FG∥BC，交直线 AB 于点 G，则 FG、DC、AD 之间满足的数量关系是____________；

（3）在（2）的条件下，若 AG= $5\sqrt{2}$，DC=3，将一个 45°角的顶点与点 B 重合并绕点 B 旋转，这个角的两边分别交线段 FG 于 M、N 两点（如图 3），连接

CF，线段 CF 分别与线段 BM、线段 BN 相交于 P、Q 两点，若 NG=$\frac{3}{2}$，求线段 PQ 的长．

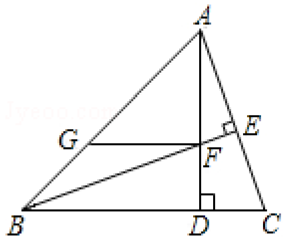


图1

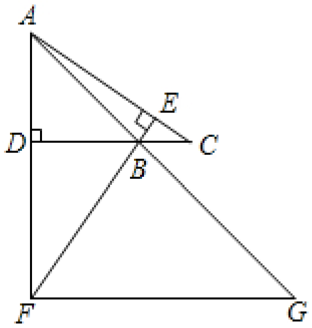


图2

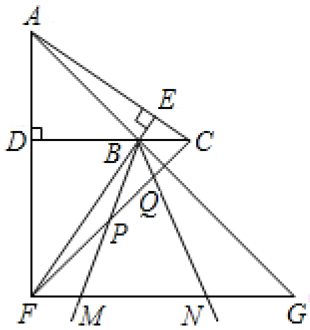


图3

39．一位同学拿了两块 45°的三角尺△MNK、△ACB 做了一个探究活动：将△MNK 的直角顶点 M 放在△ABC 的斜边 AB 的中点处，设 AC=BC=a．

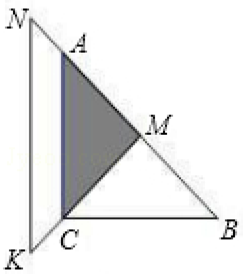


图1

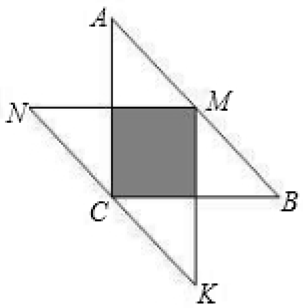


图2

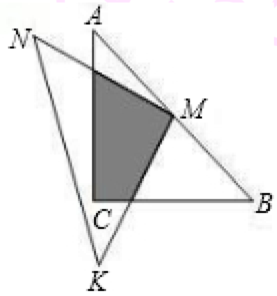


图3

（1）如图 1，两个三角尺的重叠部分为△ACM，则重叠部分的面积为____________，周长为____________；

（2）将图 1 中的△MNK 绕顶点 M 逆时针旋转 45°，得到图 2，此时重叠部分的面积为____________，周长为____________；

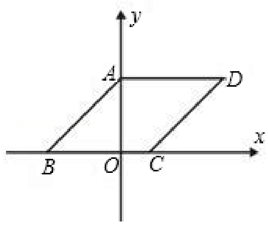
（3）如果将△MNK 绕 M 旋转到不同于图 1，图 2 的位置，如图 3 所示，猜想此时重叠部分的面积为多少？并试着加以验证．

40．如图，将边长为$\sqrt{2}$的菱形 ABCD 纸片放置在平面直角坐标系中．已知∠B=45°．

（1）画出边 AB 沿 y 轴对折后的对应线段 A′B′，A′B′与边 CD 交于点 E；

（2）求出线段 CB′的长；

（3）求点 E 的坐标．

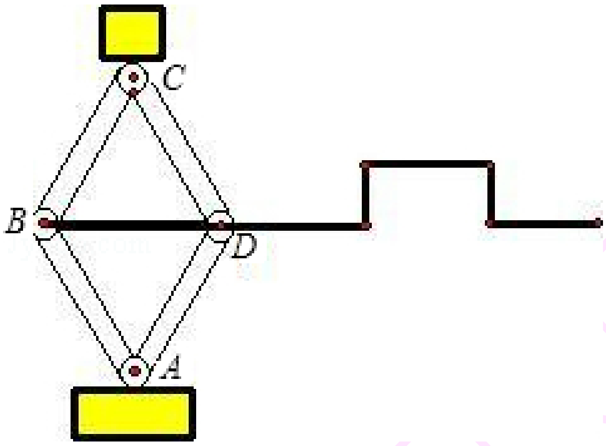


41．有一种汽车用“千斤顶”，它由 4 根连杆组成菱形 ABCD，当螺旋装置顺时针旋转时，B、D 两点的距离变小，从而顶起汽车．若 AB=30，螺旋装置每顺时针旋转 1 圈，BD 的长就减少 1．设 BD=a，AC=h，

（1）当 a=40 时，求 h 值；

（2）从 a=40 开始，设螺旋装置顺时针方向旋转 x 圈，求 h 关于 x 的函数解析式；

（3）从 a=40 开始，螺旋装置顺时针方向连续旋转 2 圈，设第 1 圈使“千斤顶”增高 s_1，第 2 圈使“千斤顶”增高 s_2，试判定 s_1 与 s_2 的大小，并说明理由；若将条件“从 a=40 开始”改为“从某一时刻开始”，则结果如何，为什么？



42．如图 1，在△ABC 和△EDC 中，AC=CE=CB=CD；∠ACB=∠DCE=90°，AB 与 CE 交于 F，ED 与 AB，BC，分别交于 M，H．

（1）求证：CF=CH；

（2）如图 2，△ABC 不动，将△EDC 绕点 C 旋转到∠BCE=45°时，试判断四边形 ACDM 是什么四边形？并证明你的结论．

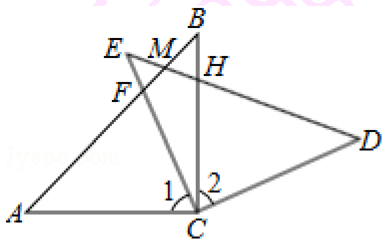


图1

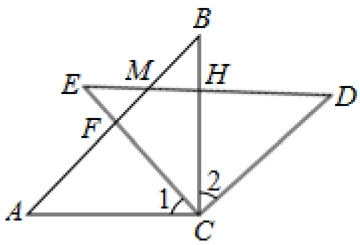
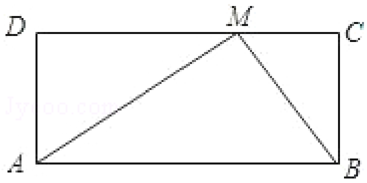


图2

43．若从矩形一边上的点到对边的视角是直角，则称该点为直角点．例如，如图的矩形 ABCD 中，点 M 在 CD 边上，连 AM，BM，∠AMB=90°，则点 M 为直角点．

（1）若矩形 ABCD 一边 CD 上的直角点 M 为中点，问该矩形的邻边具有何种数量关系？并说明理由；

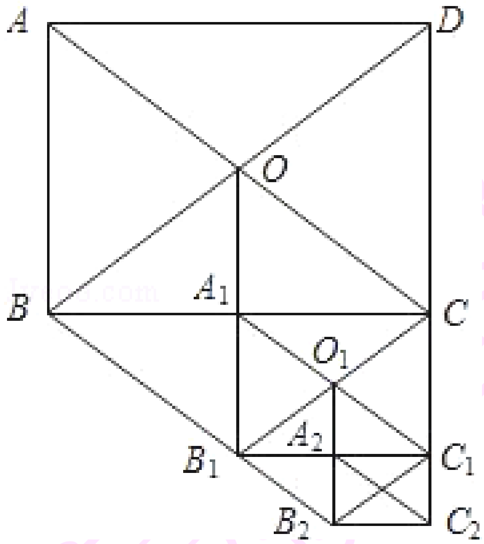
（2）若点 M，N 分别为矩形 ABCD 边 CD，AB 上的直角点，且 AB=4，BC=$\sqrt{3}$，求 MN 的长．



44．如图所示，在矩形 ABCD 中，AB=12，AC=20，两条对角线相交于点 O．以 OB、OC 为邻边作第 1 个平行四边形 OBB_1C，对角线相交于点 A_1；再以 A_1B_1、A_1C 为邻边作第 2 个平行四边形 $A_1B_1C_1C$，对角线相交于点 O_1；再以 O_1B_1、O_1C_1 为邻边作第 3 个平行四边形 $O_1B_1B_2C_1$…依此类推．

（1）求矩形 ABCD 的面积；

（2）求第 1 个平行四边形 OBB_1C，第 2 个平行四边形和第 6 个平行四边形的面积．

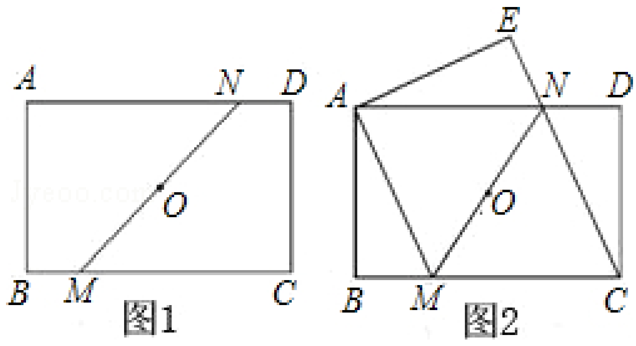


45．已知：矩形 ABCD 中 AD＞AB，O 是对角线的交点，过 O 任作一直线分别交 BC、AD 于点 M、N（如图①）．

（1）求证：BM=DN；

（2）如图②，四边形 AMNE 是由四边形 CMND 沿 MN 翻折得到的，连接 CN，求证：四边形 AMCN 是菱形；

（3）在（2）的条件下，若△CDN 的面积与△CMN 的面积比为 1：3，求$\frac{MN}{DN}$的值．



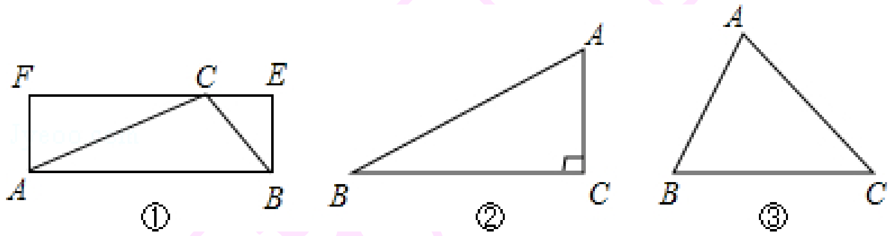
46．阅读以下短文，然后解决下列问题：

如果一个三角形和一个矩形满足条件：三角形的一边与矩形的一边重合，且三角形的这边所对的顶点在矩形这边的对边上，则称这样的矩形为三角形的“友好矩形”，如图①所示，矩形 ABEF 即为△ABC 的“友好矩形”，显然，当△ABC 是钝角三角形时，其“友好矩形”只有一个．

（1）仿照以上叙述，说明什么是一个三角形的“友好平行四边形”；

（2）如图②，若△ABC 为直角三角形，且∠C=90°，在图②中画出△ABC 的所有“友好矩形”，并比较这些矩形面积的大小；

（3）若△ABC 是锐角三角形，且 BC＞AC＞AB，在图③中画出△ABC 的所有“友好矩形”，指出其中周长最小的矩形并加以证明．



47．已知四边形 ABCD 中，P 是对角线 BD 上的一点，过 P 作 MN∥AD，EF∥CD，分别交 AB、CD、AD、BC 于点 M、N、E、F，设 a=PM•PE，b=PN•PF，解答下列问题：

（1）当四边形 ABCD 是矩形时，见图 1，请判断 a 与 b 的大小关系，并说明理由；

（2）当四边形 ABCD 是平行四边形，且∠A 为锐角时，见图 2，（1）中的结论是否成立？并说明理由；

（3）在（2）的条件下，设 $\frac{BP}{PD}=k$，是否存在这样的实数 k，使得 $\frac{S_{\text{平行四边形}PEAM}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{4}{9}$？若存在，请求出满足条件的所有 k 的值；若不存在，请说明理由．

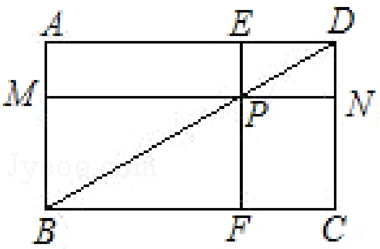


图 1

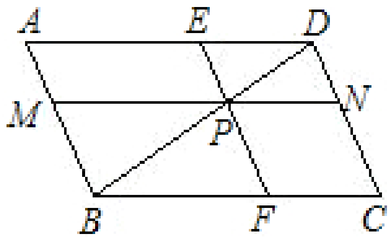
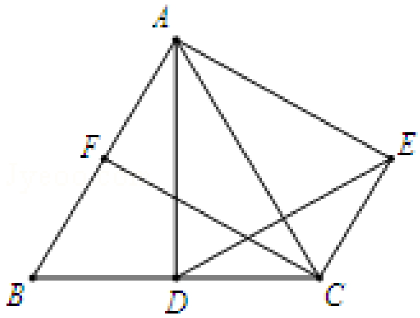


图 2

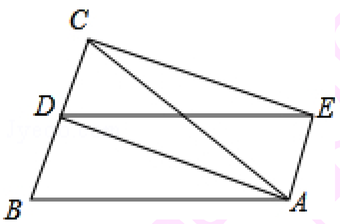
48．如图，在等边△ABC 中，点 D 是 BC 边的中点，以 AD 为边作等边△ADE．

（1）求∠CAE 的度数；

（2）取 AB 边的中点 F，连接 CF、CE，试证明四边形 AFCE 是矩形．



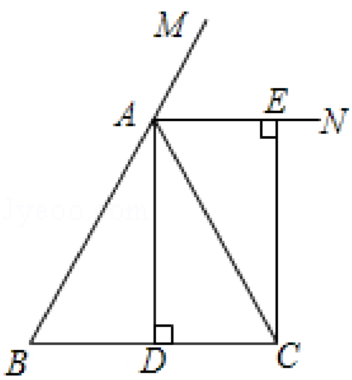
49．如图，在△ABC 中，AB=AC，D 为 BC 中点，四边形 ABDE 是平行四边形．求证：四边形 ADCE 是矩形．



50．已知：如图，在△ABC 中，AB=AC，AD⊥BC，垂足为点 D，AN 是△ABC 外角∠CAM 的平分线，CE⊥AN，垂足为点 E，

（1）求证：四边形 ADCE 为矩形；

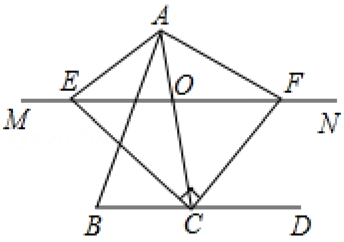
（2）当△ABC 满足什么条件时，四边形 ADCE 是一个正方形？并给出证明．



51．如图，在△ABC 中，点 O 是 AC 边上的一个动点，过点 O 作 MN∥BC，交∠ACB 的平分线于点 E，交∠ACB 的外角平分线于点 F．

（1）求证：$OC=\frac{1}{2}EF$；

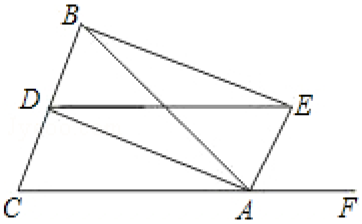
（2）当点 O 位于 AC 边的什么位置时，四边形 AECF 是矩形？并给出证明．



52．如图，△ABC 中，AB=AC，AD、AE 分别是∠BAC 和∠BAC 和外角的平分线，BE⊥AE．

（1）求证：DA⊥AE；

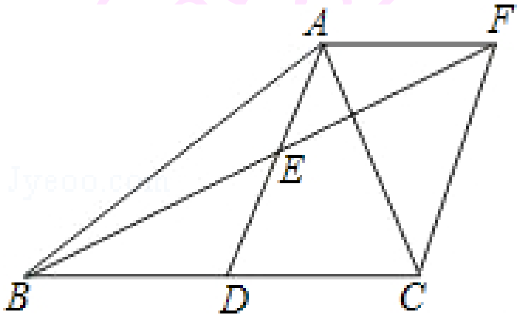
（2）试判断 AB 与 DE 是否相等？并证明你的结论．



53．已知：如图，在△ABC 中，D 是 BC 边上的一点，E 是 AD 的中点，过点 A 作 BC 的平行线交于 BE 的延长线于点 F，且 AF=DC，连接 CF．

（1）求证：D 是 BC 的中点；

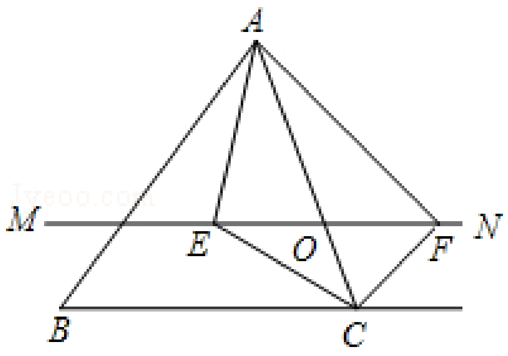
（2）如果 AB=AC，试判断四边形 ADCF 的形状，并证明你的结论．



54．如图，在△ABC 中，点 O 是 AC 边上的一个动点，过点 O 作直线 MN∥BC，设 MN 交∠BCA 的角平分线于点 E，交∠BCA 的外角平分线于点 F．

（1）求证：EO=FO；

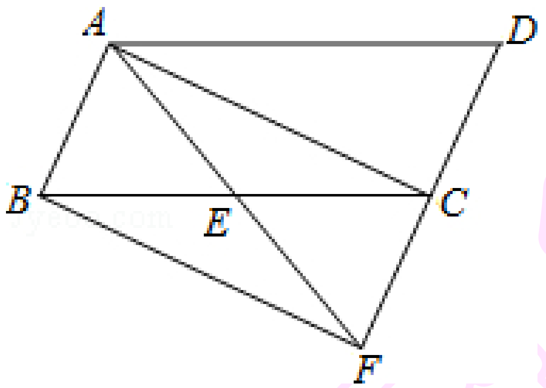
（2）当点 O 运动到何处时，四边形 AECF 是矩形？并证明你的结论．



55．如图，在平行四边形 ABCD 中，E 为 BC 的中点，连接 AE 并延长交 DC 的延长线于点 F．

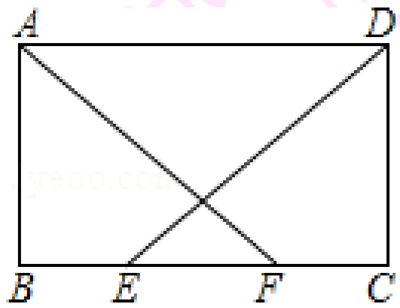
（1）求证：AB=CF；

（2）当 BC 与 AF 满足什么数量关系时，四边形 ABFC 是矩形，并说明理由．



56．如图，在平行四边形 ABCD 中，E，F 为 BC 上两点，且 BE=CF，AF=DE．求证：（1）△ABF≌△DCE；

（2）四边形 ABCD 是矩形．

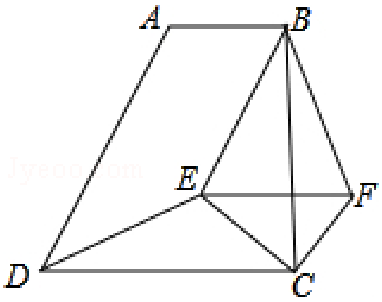


57．在梯形 ABCD 中，AB∥CD，∠ABC=90°，AB=5，BC=10，tan∠ADC=2．

（1）求 DC 的长；

（2）E 为梯形内一点，F 为梯形外一点，若 BF=DE，∠FBC=∠CDE，试判断△ECF 的形状，并说明理由．

（3）在（2）的条件下，若 BE⊥EC，BE：EC=4：3，求 DE 的长．



58．将两块全等的含 30°角的三角尺如图 1 摆放在一起，设较短直角边为 1，另一直角边的长为$\sqrt{3}$．

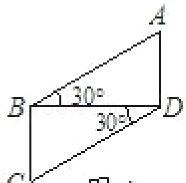


图 1

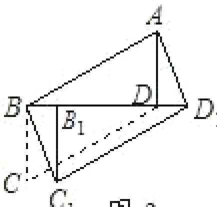


图 2

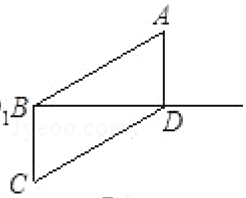


图 3

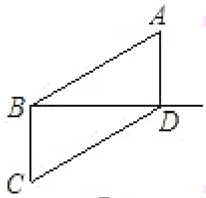


图 4

（1）四边形 ABCD 是平行四边形吗？说出你的结论和理由：____________．

（2）如图 2，将 Rt△BCD 沿射线 BD 方向平移到 Rt△$B_1C_1D_1$的位置，四边形 ABC_1D_1是平行四边形吗？说出你的结论和理由：____________．

（3）在 Rt△BCD 沿射线 BD 方向平移的过程中，当点 B 的移动距离为________时，四边形 ABC_1D_1为矩形，其理由是____________；当点 B 的移动距离为___时，四边形 ABC_1D_1为菱形，其理由是____________．（图 3、图 4 用于探究）

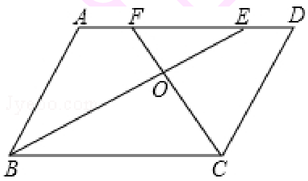
59．已知，如图，▱ABCD 中，BE，CF 分别是∠ABC 和∠BCD 的一平分线，BE，CF 相交于点 O．

（1）求证：BE⊥CF；

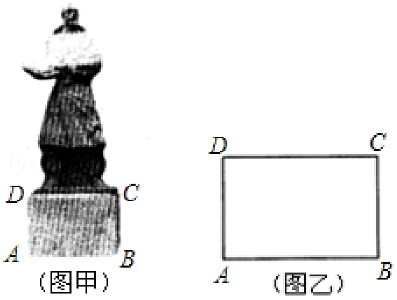
（2）试判断 AF 与 DE 有何数量关系，并说明理由；

（3）当△BOC 为等腰直角三角形时，四边形 ABCD 是何特殊四边形？

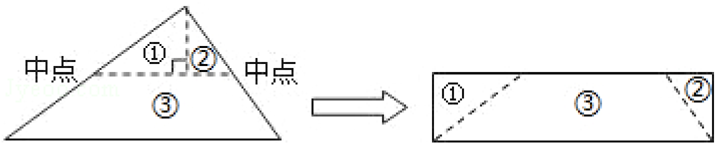
（直接写出答案）



60．如图甲，李叔叔想要检测雕塑底座正面四边形 ABCD 是否为矩形，但他随身只带了有刻度的卷尺，请你设计一种方案，帮助李叔叔检测四边形 ABCD 是否为矩形（图乙供设计备用）．

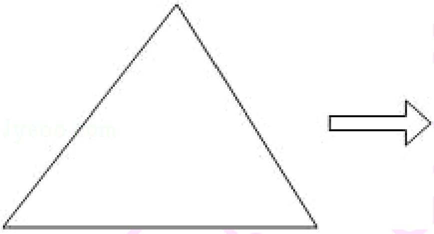


61．直角三角形通过剪切可以拼成一个与该直角三角形面积相等的矩形．方法如下：

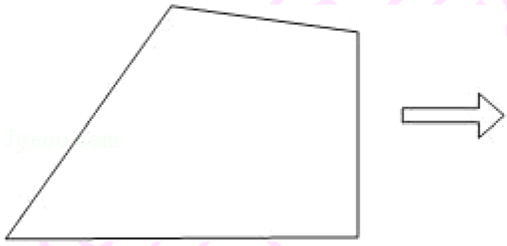


请你用上面图示的方法，解答下列问题：

（1）对任意三角形，设计一种方案，将它分成若干块，再拼成一个与原三角形面积相等的矩形；



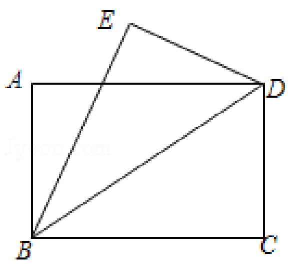
（2）对任意四边形，设计一种方案，将它分成若干块，再拼成一个与原四边形面积相等的矩形．



62．如图，AB=CD=ED，AD=EB，BE⊥DE，垂足为E．

（1）求证：△ABD≌△EDB；

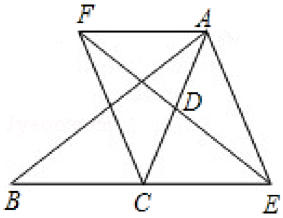
（2）只需添加一个条件，即____________等，可使四边形ABCD为矩形．请加以证明．



63．已知：如图，在△ABC 中，D 是 AC 的中点，E 是线段 BC 延长线上一点，过点 A 作 BE 的平行线与线段 ED 的延长线交于点 F，连接 AE，CF．

（1）求证：AF=CE；

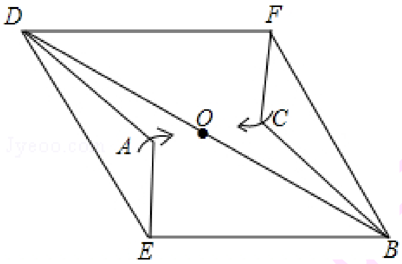
（2）若 AC=EF，试判断四边形 AFCE 是什么样的四边形，并证明你的结论．



64．已知：平行四边形 ABCD 的对角线交点为 O，点 E、F 分别在边 AB、CD 上，分别沿 DE、BF 折叠四边形 ABCD，A、C 两点恰好都落在 O 点处，且四边形 DEBF 为菱形（如图）．

（1）求证：四边形 ABCD 是矩形；

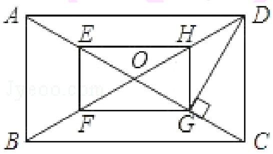
（2）在四边形 ABCD 中，求$\frac{AB}{BC}$的值．



65．如图，O 是矩形 ABCD 的对角线的交点，E、F、G、H 分别是 OA、OB、OC、OD 上的点，且 AE=BF=CG=DH．

（1）求证：四边形 EFGH 是矩形；

（2）若 E、F、G、H 分别是 OA、OB、OC、OD 的中点，且 DG⊥AC，OF=2cm，求矩形 ABCD 的面积．



66．已知矩形 ABCD 和点 P，当点 P 在 BC 上任一位置（如图（1）所示）时，易证得结论：$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$，请你探究：当点 P 分别在图（2）、图（3）中的位置时，PA^2、PB^2、PC^2和 PD^2又有怎样的数量关系请你写出对上述两种情况的探究结论，并利用图（2）证明你的结论．

答：对图（2）的探究结论为____________；

对图（3）的探究结论为__________；

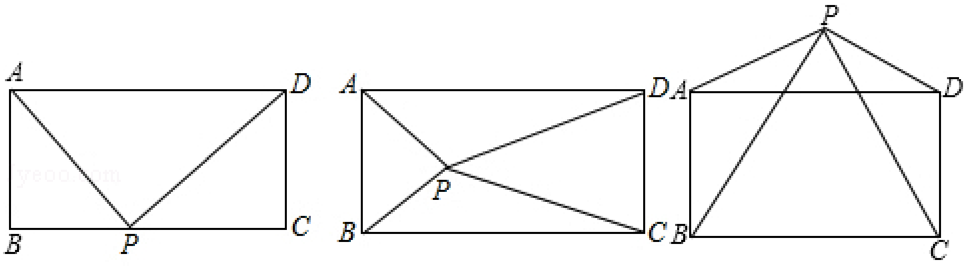
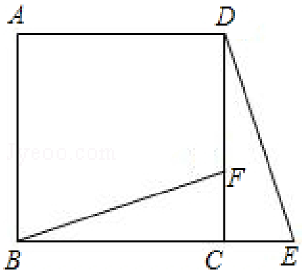


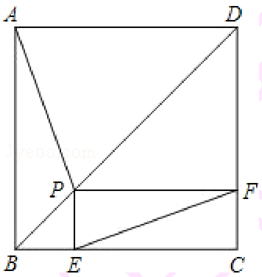
图1　　图2　　图3

证明：如图（2）

67．已知：如图，E 为正方形 ABCD 的边 BC 延长线上的点，F 是 CD 边上一点，且 CE=CF，连接 DE，BF．求证：DE=BF．



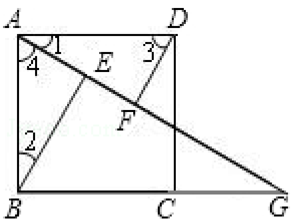
68．如图，点 P 是正方形 ABCD 的对角线 BD 上一点，PE⊥BC 于点 E，PF⊥CD 于点 F，连接 EF 给出下列五个结论：①AP=EF；②AP⊥EF；③△APD 一定是等腰三角形；④∠PFE=∠BAP；⑤PD=$\sqrt{2}$EC．其中正确结论的序号是__________．



69．如图，四边形 ABCD 是边长为 2 的正方形，点 G 是 BC 延长线上一点，连接 AG，点 E、F 分别在 AG 上，连接 BE、DF，∠1=∠2，∠3=∠4．

（1）证明：△ABE≌△DAF；

（2）若∠AGB=30°，求 EF 的长．



70 .（1）如图 1，在正方形 ABCD 中，点 E、F 分别在边 BC、CD 上，AE、BF 交于点 O，∠AOF=90°．求证：BE=CF．

（2）如图 2，在正方形 ABCD 中，点 E、H、F、G 分别在边 AB、BC、CD、DA 上，

EF、GH 交于点 O，∠FOH=90°，EF=4．求 GH 的长．

（3）已知点 E、H、F、G 分别在矩形 ABCD 的边 AB、BC、CD、DA 上，EF、GH 交于点 O，∠FOH=90°，EF=4．直接写出下列两题的答案：

①如图 3，矩形 ABCD 由 2 个全等的正方形组成，则 GH=____________；

②如图 4，矩形 ABCD 由 n 个全等的正方形组成，则 GH=____________（用 n 的代数式表示）．

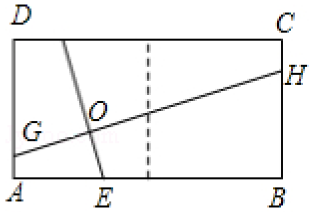


图3

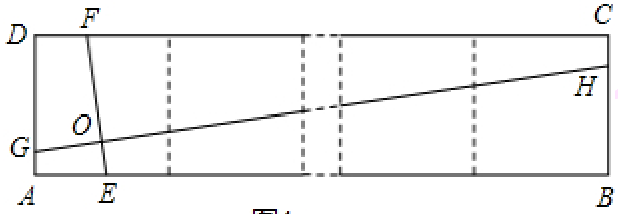


图4

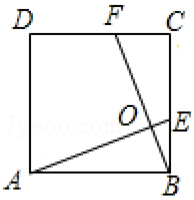


图1

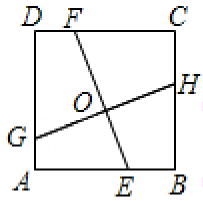
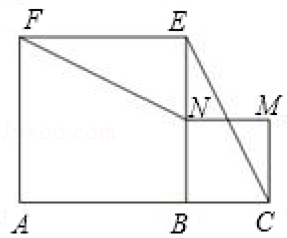


图2

71．如图，A、B、C 三点在同一条直线上，AB=2BC，分别以 AB，BC 为边做正方形 ABEF 和正方形 BCMN 连接 FN，EC．

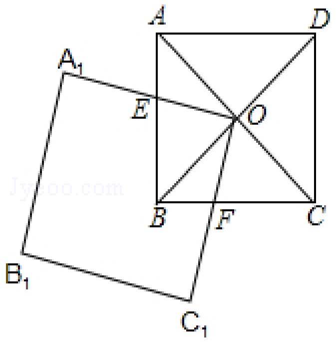
求证：FN=EC．



72 如图，正方形 ABCD 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O，O 又是正方形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，O A_1 交 AB 于点 E，OC_1 交 BC 于点 F．

（1）求证：△AOE≌△BOF；

（2）如果两个正方形的边长都为 a，那么正方形 $A_1B_1C_1O$ 绕 O 点转动，两个正方形重叠部分的面积等于多少？为什么？



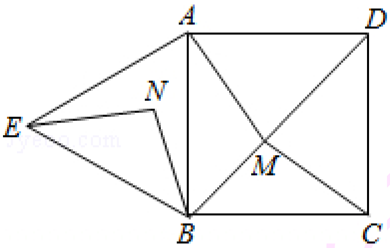
73．如图，四边形 ABCD 是正方形，△ABE 是等边三角形，M 为对角线 BD（不含 B 点）上任意一点，将 BM 绕点 B 逆时针旋转 60°得到 BN，连接 EN、AM、CM．

（1）求证：△AMB≌△ENB；

（2）①当 M 点在何处时，AM+CM 的值最小；

②当 M 点在何处时，AM+BM+CM 的值最小，并说明理由；

（3）当 AM+BM+CM 的最小值为$\sqrt{3}+1$时，求正方形的边长．

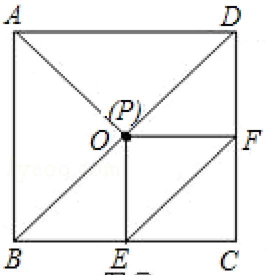


74．正方形 ABCD 中，点 O 是对角线 DB 的中点，点 P 是 DB 所在直线上的一个动点，PE⊥BC 于 E，PF⊥DC 于 F．

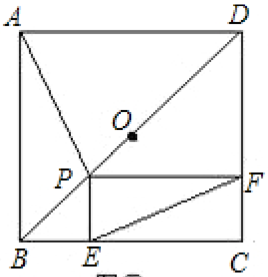
（1）当点 P 与点 O 重合时（如图①），猜测 AP 与 EF 的数量及位置关系，并证明你的结论；

（2）当点 P 在线段 DB 上（不与点 D、O、B 重合）时（如图②），探究（1）中的结论是否成立？若成立，写出证明过程；若不成立，请说明理由；

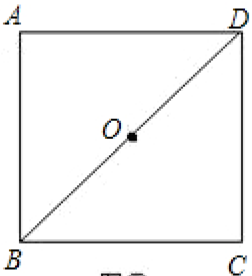
（3）当点 P 在 DB 的长延长线上时，请将图③补充完整，并判断（1）中的结论是否成立？若成立，直接写出结论；若不成立，请写出相应的结论．



图①

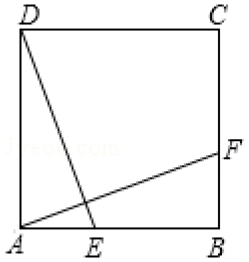


图②

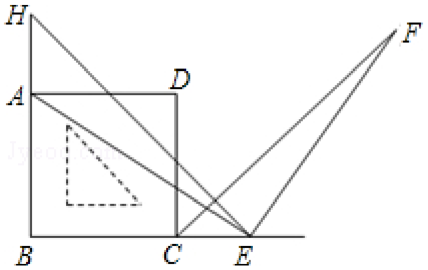


图③

75．如图，正方形 ABCD 中，E、F 分别是 AB、BC 边上的点，且 AE=BF，求证：AF⊥DE．



76．如图，一个含 45°的三角板 HBE 的两条直角边与正方形 ABCD 的两邻边重合，过 E 点作 EF⊥AE 交∠DCE 的角平分线于 F 点，试探究线段 AE 与 EF 的数量关系，并说明理由．



77．正方形 ABCD 中，点 O 是对角线 AC 的中点，P 是对角线 AC 上一动点，过点 P 作 PF⊥CD 于点 F．如图 1，当点 P 与点 O 重合时，显然有 DF=CF．

（1）如图 2，若点 P 在线段 AO 上（不与点 A、O 重合），PE⊥PB 且 PE 交 CD 于点 E．

①求证：DF=EF；

②写出线段 PC、PA、CE 之间的一个等量关系，并证明你的结论；

（2）若点 P 在线段 OC 上（不与点 O、C 重合），PE⊥PB 且 PE 交直线 CD 于点 E．请完成图 3 并判断（1）中的结论①、②是否分别成立？若不成立，写出相应的结论．（所写结论均不必证明）

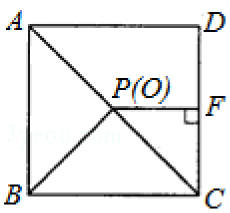


图1

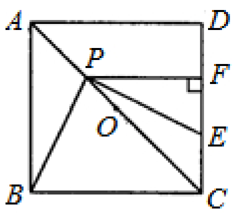


图2

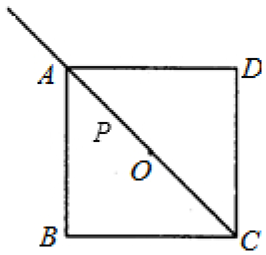
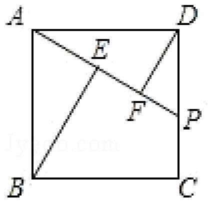


图3

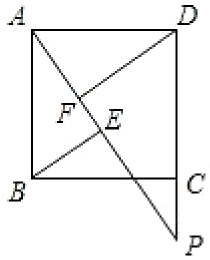
78．在正方形 ABCD 中，点 P 是 CD 边上一动点，连接 PA，分别过点 B、D 作 BE⊥PA、DF⊥PA，垂足分别为 E、F，如图①．

（1）请探究 BE、DF、EF 这三条线段的长度具有怎样的数量关系？若点 P 在 DC 的延长线上，如图②，那么这三条线段的长度之间又具有怎样的数量关系？若点 P 在 CD 的延长线上呢，如图③，请分别直接写出结论；

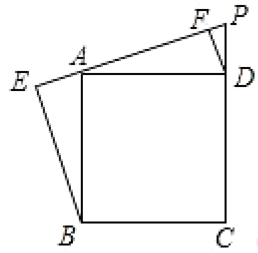
（2）就（1）中的三个结论选择一个加以证明．



图①



图②



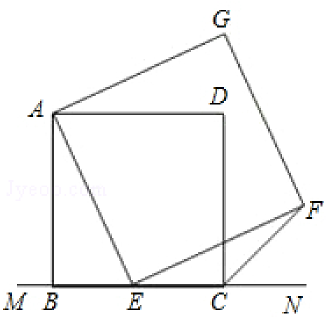
图③

79．如图（1），已知正方形 ABCD 在直线 MN 的上方，BC 在直线 MN 上，E 是 BC 上一点，以 AE 为边在直线 MN 的上方作正方形 AEFG．

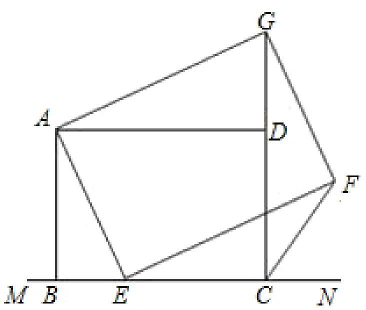
（1）连接 GD，求证：△ADG≌△ABE；

（2）连接 FC，观察并猜测∠FCN 的度数，并说明理由；

（3）如图（2），将图（1）中正方形 ABCD 改为矩形 ABCD，AB=a，BC=b（a、b 为常数），E 是线段 BC 上一动点（不含端点 B、C），以 AE 为边在直线 MN 的上方作矩形 AEFG，使顶点 G 恰好落在射线 CD 上．判断当点 E 由 B 向 C 运动时，∠FCN 的大小是否总保持不变？若∠FCN 的大小不变，请用含 a、b 的代数式表示 tan∠FCN 的值；若∠FCN 的大小发生改变，请举例说明．



图（1）



图（2）

80．数学课上，张老师出示了问题：如图 1，四边形 ABCD 是正方形，点 E 是边 BC 的中点．∠AEF=90°，且 EF 交正方形外角∠DCG 的平分线 CF 于点 F，求证：AE=EF．

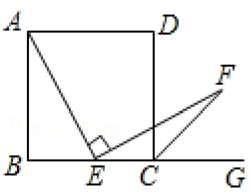


图 1

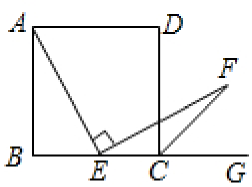


图 2

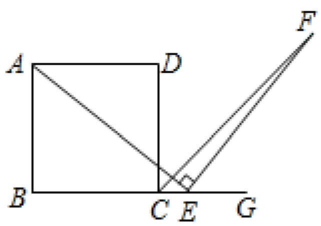


图 3

经过思考，小明展示了一种正确的解题思路：取 AB 的中点 M，连接 ME，则 AM=EC，易证△AME≌△ECF，所以 AE=EF．

在此基础上，同学们作了进一步的研究：

（1）小颖提出：如图 2，如果把“点 E 是边 BC 的中点”改为“点 E 是边 BC 上（除 B，C 外）的任意一点”，其它条件不变，那么结论“AE=EF”仍然成立，你认为小颖的观点正确吗？如果正确，写出证明过程；如果不正确，请说明理由；

（2）小华提出：如图 3，点 E 是 BC 的延长线上（除 C 点外）的任意一点，其他条件不变，结论“AE=EF”仍然成立．你认为小华的观点正确吗？如果正确，写出证明过程；如果不正确，请说明理由．

81．四边形 ABCD 是正方形．

（1）如图 1，点 G 是 BC 边上任意一点（不与 B、C 两点重合），连接 AG，作 BF⊥AG 于点 F，DE⊥AG 于点 E．求证：△ABF≌△DAE；

（2）在（1）中，线段 EF 与 AF、BF 的等量关系是____________（直接写出结论即可，不需要证明）；

（3）如图 2，点 G 是 CD 边上任意一点（不与 C、D 两点重合），连接 AG，作 BF⊥AG 于点 F，DE⊥AG 于点 E．那么图中全等三角形是____________，线段 EF 与 AF、BF 的等量关系是____________（直接写出结论即可，不需要证明）．

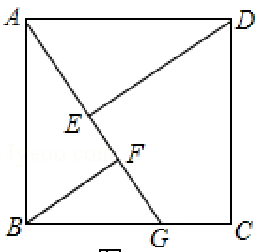


图1

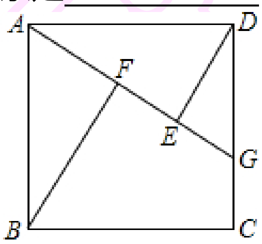


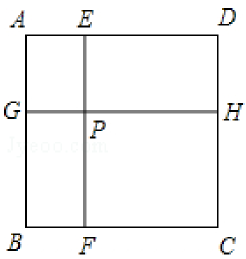
图2

82．如图，边长为 1 的正方形 ABCD 被两条与边平行的线段 EF、GH 分割为四个小矩形，EF 与 GH 交于点 P．

（1）若 AG=AE，证明：AF=AH；

（2）若∠FAH=45°，证明：AG+AE=FH；

（3）若 Rt△GBF 的周长为 1，求矩形 EPHD 的面积．

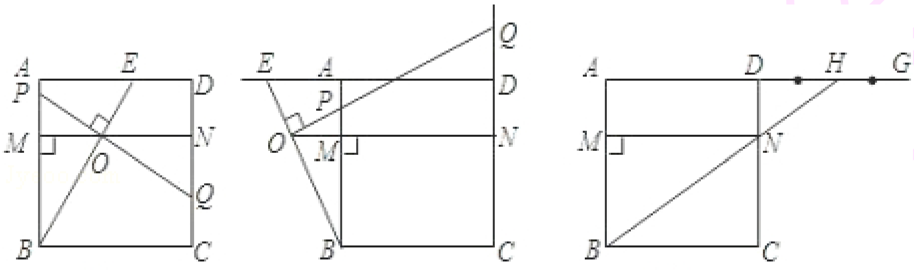


83．在正方形 ABCD 中，点 E 是 AD 上一动点，MN⊥AB 分别交 AB，CD 于 M，N，连接 BE 交 MN 于点 O，过 O 作 OP⊥BE 分别交 AB，CD 于 P，Q．

探究：(1) 如图①，当点 E 在边 AD 上时，请你动手测量三条线段 AE，MP，NQ 的长度，猜测 AE 与 MP+NQ 之间的数量关系，并证明你所猜测的结论；

探究：(2) 如图②，若点 E 在 DA 的延长线上时，AE，MP，NQ 之间的数量关系又是怎样请直接写出结论；

再探究：(3) 如图③，连接并延长 BN 交 AD 的延长线 DG 于 H，若点 E 分别在线段 DH 和射线 HG 上时，请在图③中完成符合题意的图形，并判断 AE，MP，NQ 之间的数量关系又分别怎样？请直接写出结论．



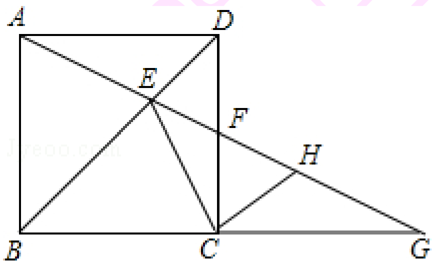
图①　图②　图③

84．如图，在正方形 ABCD 中，点 F 在 CD 边上，射线 AF 交 BD 于点 E，交 BC 的延长线于点 G．

(1) 求证：△ADE≌△CDE；

(2) 过点 C 作 CH⊥CE，交 FG 于点 H，求证：FH=GH；

(3) 设 AD=1，DF=x，试问是否存在 x 的值，使△ECG 为等腰三角形？若存在，请求出 x 的值；若不存在，请说明理由．



85．如图 1，在正方形 ABCD 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 E，AF 平分∠BAC，交 BD 于点 F．

(1) 求证：$EF+\frac{1}{2}AC=AB$；

(2) 点 C_1 从点 C 出发，沿着线段 CB 向点 B 运动（不与点 B 重合），同时点 A_1 从点 A 出发，沿着 BA 的延长线运动，点 C_1 与 A_1 的运动速度相同，当动点 C_1 停止运动时，另一动点 A_1 也随之停止运动．如图 2，A_1F_1 平分∠BA_1C_1，交

BD 于点 F_1，过点 F_1 作 $F_1E_1 \perp A_1C_1$，垂足为 E_1，请猜想 E_1F_1，$\frac{1}{2}A_1C_1$ 与 AB 三者之间的数量关系，并证明你的猜想；

（3）在（2）的条件下，当 $A_1E_1=3$，$C_1E_1=2$ 时，求 BD 的长．

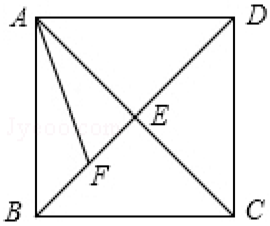


图1

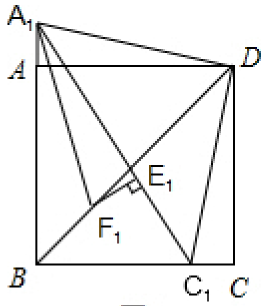


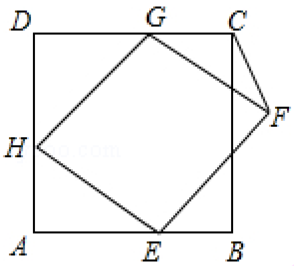
图2

86．已知，如图，正方形 ABCD 的边长为 6，菱形 EFGH 的三个顶点 E，G，H 分别在正方形 ABCD 边 AB，CD，DA 上，AH=2，连接 CF．

（1）当 DG=2 时，求△FCG 的面积；

（2）设 DG=x，用含 x 的代数式表示△FCG 的面积；

（3）判断△FCG 的面积能否等于 1，并说明理由．



87．如图 1，在正方形 ABCD 中，点 E、F 分别为边 BC、CD 的中点，AF、DE 相交于点 G，则可得结论：①AF=DE，②AF⊥DE（不须证明）．

（1）如图②，若点 E、F 不是正方形 ABCD 的边 BC、CD 的中点，但满足 CE=DF，则上面的结论①、②是否仍然成立；（请直接回答“成立”或“不成立”）

（2）如图③，若点 E、F 分别在正方形 ABCD 的边 CB 的延长线和 DC 的延长线上，且 CE=DF，此时上面的结论①、②是否仍然成立？若成立，请写出证明过程；若不成立，请说明理由．

（3）如图④，在（2）的基础上，连接 AE 和 EF，若点 M、N、P、Q 分别为 AE、EF、FD、AD 的中点，请先判断四边形 MNPQ 是“矩形、菱形、正方形、等腰梯形”中的哪一种，并写出证明过程．

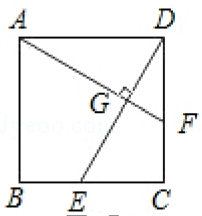


图 ①

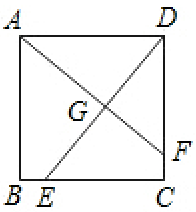


图 ②

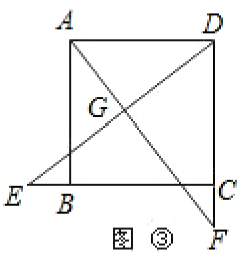


图 ③

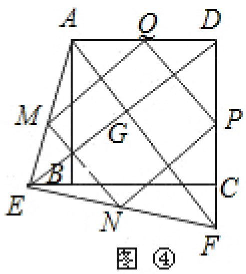


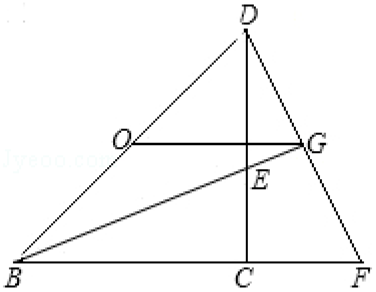
图 ④

88．已知：如图所示，O 为等腰直角△BCD 斜边 BD 的中点，BE 平分∠DBC，交 DC 于点 E，延长 BC 到点 F，使 CF=CE，连接 DF，交 BE 的延长线于点 G，连接 OG．

（1）求证：△BCE≌△DCF；

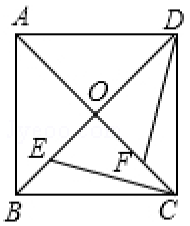
（2）OG 与 BF 有什么数量关系？证明你的结论；

（3）若 GE•GB=4 - $2\sqrt{2}$，求△DBG 的面积．



89．如图：正方形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，且 BE=CF，

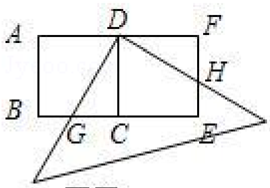
求证：①∠OEC=∠OFD．②CE=DF．



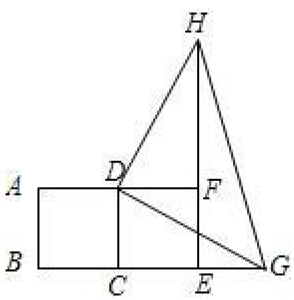
90．用两个全等的正方形 ABCD 和 CDFE 拼成一个矩形 ABEF，把一个足够大的直角三角尺的直角顶点与这个矩形的边 AF 的中点 D 重合，且将直角三角尺绕点 D 按逆时针方向旋转．

（1）当直角三角尺的两直角边分别与矩形 ABEF 的两边 BE，EF 相交于点 G，H 时，如图甲，通过观察或测量 BG 与 EH 的长度，你能得到什么结论并证明你的结论；

（2）当直角三角尺的两直角边分别与 BE 的延长线，EF 的延长线相交于点 G，H 时（如图乙），你在图甲中得到的结论还成立吗？简要说明理由．



图甲



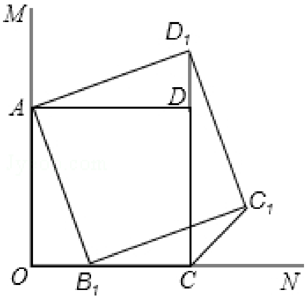
图乙

91．如图：∠MON=90°，在∠MON 的内部有一个正方形 AOCD，点 A、C 分别在射线 OM、ON 上，点 B_1 是 ON 上的任意一点，在∠MON 的内部作正方形 $AB_1C_1D_1$．

（1）连续 D_1D，求证：$\angle D_1DA=90°$；

（2）连接 CC_1，猜一猜，$\angle C_1CN$ 的度数是多少？并证明你的结论；

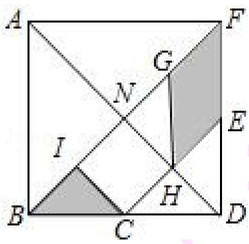
（3）在 ON 上再任取一点 B_2，以 AB_2 为边，在∠MON 的内部作正方形 $AB_2C_2D_2$，观察图形，并结合（1）、（2）的结论，请你再做出一个合理的判断．



92．七巧板是我们祖先的一项创造，被誉为“东方魔板”，如图是一副七巧板，若已知 $S_{\triangle BPC}=1$，请你根据七巧板制作过程的认识，解决下列问题：

（1）求一只蚂蚁从点 A 沿 A⇒B⇒C⇒H⇒E 所走的路线的总长（结果精确到 0.01）；

（2）求平行四边形 EFGH 的面积．



93．如图 1，已知正方形 ABCD 的对角线 AC、BD 相交于点 O，E 是 AC 上一点，连接 EB，过点 A 作 AM⊥BE，垂足为 M，AM 交 BD 于点 F．

（1）求证：OE=OF；

（2）如图 2，若点 E 在 AC 的延长线上，AM⊥BE 于点 M，交 DB 的延长线于点 F，其它条件不变，则结论“OE=OF”还成立吗？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由．

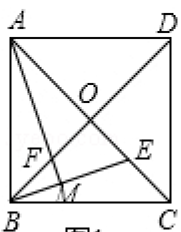


图1

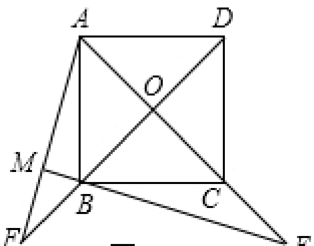


图2

94．已知正方形 ABCD．

（1）如图 1，E 是 AD 上一点，过 BE 上一点 O 作 BE 的垂线，交 AB 于点 G，交 CD 于点 H，求证：BE=GH；

（2）如图 2，过正方形 ABCD 内任意一点作两条互相垂直的直线，分别交 AD，BC 于点 E，F，交 AB，CD 于点 G，H，EF 与 GH 相等吗？请写出你的结论；

（3）当点 O 在正方形 ABCD 的边上或外部时，过点 O 作两条互相垂直的直线，被正方形相对的两边（或它们的延长线）截得的两条线段还相等吗？其中一种情形如图 3 所示，过正方形 ABCD 外一点 O 作互相垂直的两条直线 m，n，m 与 AD，BC 的延长线分别交于点 E，F，n 与 AB，DC 的延长线分别交于点 G，H，试就该图形对你的结论加以证明．

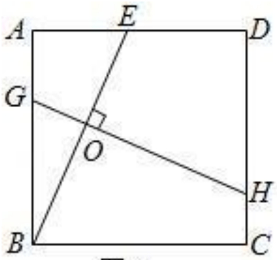


图 1

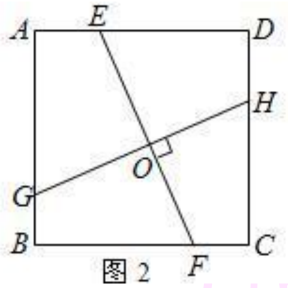


图 2

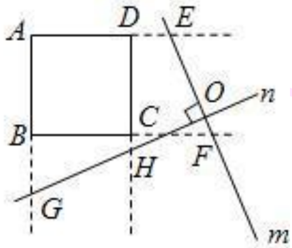
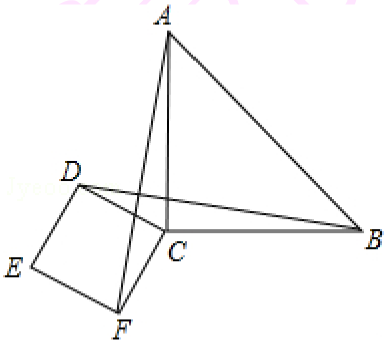


图 3

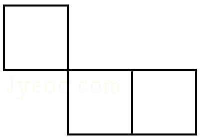
95．如图，△ABC 是等腰直角三角形，其中 CA=CB，四边形 CDEF 是正方形，连接 AF、BD．

（1）观察图形，猜想 AF 与 BD 之间有怎样的关系，并证明你的猜想；

（2）若将正方形 CDEF 绕点 C 按顺时针方向旋转，使正方形 CDEF 的一边落在△ABC 的内部，请你画出一个变换后的图形，并对照已知图形标记字母，题（1）中猜想的结论是否仍然成立？若成立，直接写出结论，不必证明；若不成立，请说明理由．

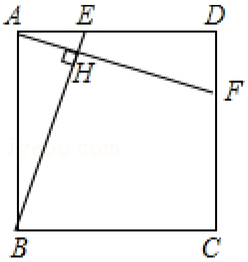


96．如图是由三个小正方形组成的图形，请你在图中补画一个小正方形，使补画后的图形为轴对称图形．



97．已知：如图，点 E 为正方形 ABCD 的边 AD 上一点，连接 BE，过点 A 作 AH⊥BE，垂足为 H，延长 AH 交 CD 于点 F．

求证：DE=CF．



98．已知正方形 ABCD 的边长 AB=k（k 是正整数），正△PAE 的顶点 P 在正方形内，顶点 E 在边 AB 上，且 AE=1．将△PAE 在正方形内按图 1 中所示的方式，沿着正方形的边 AB、BC、CD、DA、AB、…连续地翻转 n 次，使顶点 P 第一次回到原来的起始位置．

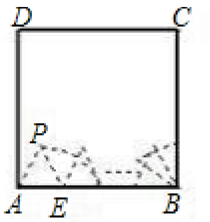


图1

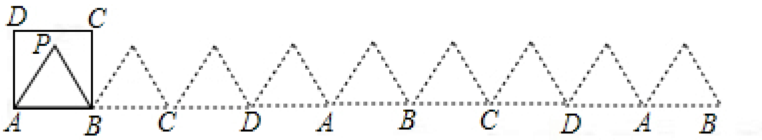


图2

（1）如果我们把正方形 ABCD 的边展开在一直线上，那么这一翻转过程可以看作是△PAE 在直线上作连续的翻转运动．图 2 是 k=1 时，△PAE 沿正方形的边连续翻转过程的展开示意图．请你探索：若 k=1，则△PAE 沿正方形的边连续翻转的次数 n=____________时，顶点 P 第一次回到原来的起始位置；

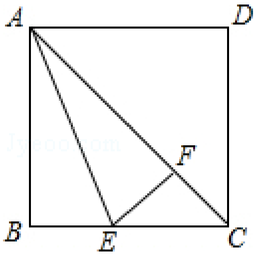
（2）若 k=2，则 n=____________时，顶点 P 第一次回到原来的起始位置；若 k=3，则 n=____________时，顶点 P 第一次回到原来的起始位置；

（3）请你猜测：使顶点 P 第一次回到原来的起始位置的 n 值与 k 之间的关系（请用含 k 的代数式表示 n）．

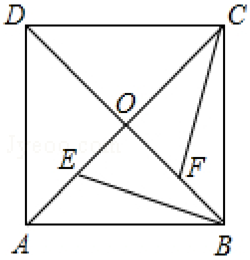
99 如图，正方形 ABCD 的边长为 1 cm，AC 是对角线，AE 平分∠BAC，EF⊥AC．

（1）BE 是否等于 CF？____________（填“是”或“否”）．

（2）BE 的长为____________cm．



100．如图，正方形 ABCD 的对角线 AC、BD 相交于点 O，∠OCF=∠OBE．求证：OE=OF．



101．如图所示，四边形 ABCD 是正方形，M 是 AB 延长线上一点，直角三角尺的一条直角边经过点 D，且直角顶点 E 在 AB 边上滑动（点 E 不与点 A，B 重合），另一直角边与∠CBM 的平分线 BF 相交于点 F．

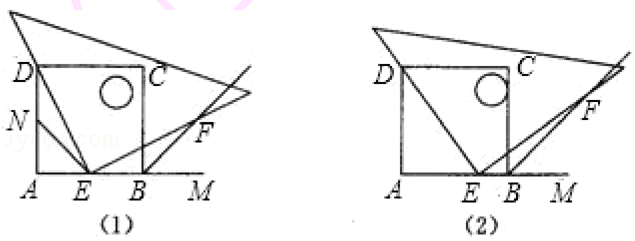
（1）如图 1 所示，当点 E 在 AB 边的中点位置时：

①通过测量 DE，EF 的长度，猜想 DE 与 EF 满足的数量关系是____________；

②连接点 E 与 AD 边的中点 N，猜想 NE 与 BF 满足的数量关系是____________；

③请证明你的上述两个猜想；

（2）如图 2 所示，当点 E 在 AB 边上的任意位置时，请你在 AD 边上找到一点 N，使得 NE=BF，进而猜想此时 DE 与 EF 有怎样的数量关系．



102．如图，操作：把正方形 CGEF 的对角线 CE 放在正方形 ABCD 的边 BC 的延长线上（CG＞BC），取线段 AE 的中点 M．

探究：线段 MD、MF 的关系，并加以证明．

说明：(1) 如果你经历反复探索，没有找到解决问题的方法，请你把探索过程中的某种思路写出来（要求至少写 3 步）；

(2) 在你经历说明 (1) 的过程后，可以从下列①、②、③中选取一个补充或更换已知条件，完成你的证明．

注意：选取①完成证明得 10 分；选取②完成证明得 7 分；选取③完成证明得 5 分．

①DM 的延长线交 CE 于点 N，且 AD=NE；②将正方形 CGEF6 绕点 C 逆时针旋转 45°（如图），其他条件不变；③在②的条件下，且 CF=2AD．

附加题：将正方形 CGEF 绕点 C 旋转任意角度后（如图），其他条件不变．探究：线段 MD、MF 的关系，并加以证明．

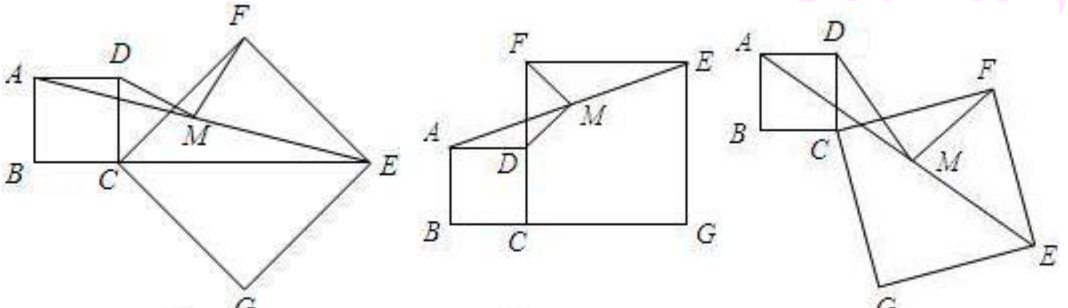
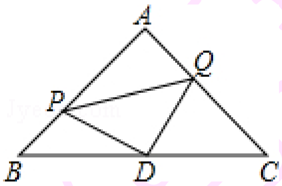


图1　图2　图3

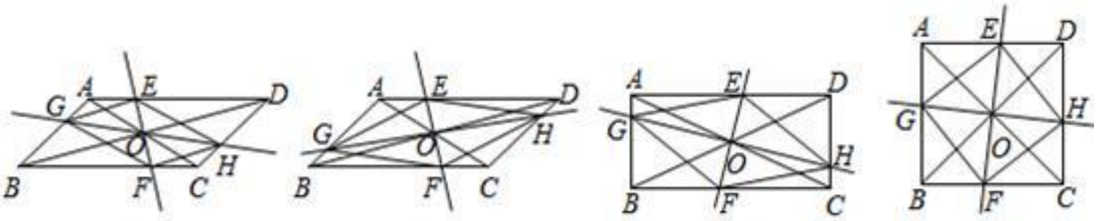
103．如图，△ABC 是等腰直角三角形，∠A=90°，点 P、Q 分别是 AB、AC 上的一动点，且满足 BP=AQ，D 是 BC 的中点．

(1) 求证：△PDQ 是等腰直角三角形；

(2) 当点 P 运动到什么位置时，四边形 APDQ 是正方形，并说明理由．



104．在□ABCD 中，AC、BD 交于点 O，过点 O 作直线 EF、GH，分别交平行四边形的四条边于 E、G、F、H 四点，连接 EG、GF、FH、HE．



图①　图②　图③　图④

(1) 如图①，试判断四边形 EGFH 的形状，并说明理由；

（2）如图②，当 EF⊥GH 时，四边形 EGFH 的形状是____________；

（3）如图③，在（2）的条件下，若 AC=BD，四边形 EGFH 的形状是____________；

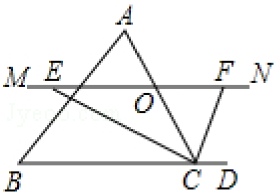
（4）如图④，在（3）的条件下，若 AC⊥BD，试判断四边形 EGFH 的形状，并说明理由．

105．如图，△ABC 中，点 O 是边 AC 上一个动点，过 O 作直线 MN∥BC，设 MN 交∠BCA 的平分线于点 E，交∠BCA 的外角平分线于点 F．

（1）探究：线段 OE 与 OF 的数量关系并加以证明；

（2）当点 O 在边 AC 上运动时，四边形 BCFE 会是菱形吗？若是，请证明；若不是，则说明理由；

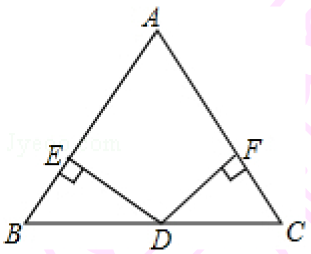
（3）当点 O 运动到何处，且△ABC 满足什么条件时，四边形 AECF 是正方形？



106．如图：已知在△ABC 中，AB=AC，D 为 BC 边的中点，过点 D 作 DE⊥AB，DF⊥AC，垂足分别为 E，F．

（1）求证：△BED≌△CFD；

（2）若∠A=90°，求证：四边形 DFAE 是正方形．

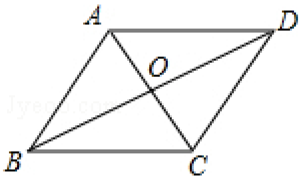


107．已知：如图，四边形 ABCD 中，AC 与 BD 相交于点 O，OB=OD，∠BAO=∠DCO．

（1）求证：四边形 ABCD 是平行四边形；

（2）把线段 AC 绕 O 点顺时针旋转，使 AC⊥BD，这时四边形 ABCD 是什么四边形？简要说明理由；

（3）在（2）中，当 AC⊥BD 后，又分别延长 OA、OC 到点 A_1，C_1，使 $OA_1=OC_1=OD$，这时四边形 A_1BC_1D 是什么四边形？简要说明理由．

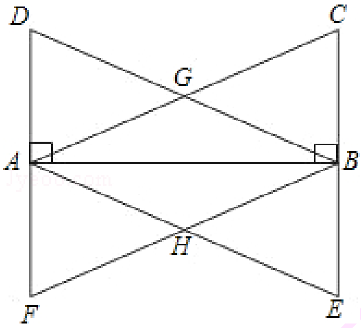


108．如图，在 Rt△ABC 与 Rt△ABD 中，∠ABC=∠BAD=90°，AD=BC，AC，BD 相交于点 G，过点 A 作 AE∥DB 交 CB 的延长线于点 E，过点 B 作 BF∥CA 交 DA 的延长线于点 F，AE，BF 相交于点 H．

（1）图中有若干对三角形是全等的，请你任选一对进行证明；（不添加任何辅助线）

（2）证明：四边形 AHBG 是菱形；

（3）若使四边形 AHBG 是正方形，还需在 Rt△ABC 的边长之间再添加一个什么条件？请你写出这个条件．（不必证明）



109．如图 1，在正方形 ABCD 中，E，F，G，H 分别为边 AB，BC，CD，DA 上的点，HA=EB=FC=GD，连接 EG，FH，交点为 O．

（1）如图 2，连接 EF，FG，GH，HE，试判断四边形 EFGH 的形状，并证明你的结论；

（2）将正方形 ABCD 沿线段 EG，HF 剪开，再把得到的四个四边形按图 3 的方式拼接成一个四边形．若正方形 ABCD 的边长为 3cm，HA=EB=FC=GD=1cm，则图 3 中阴影部分的面积为____________cm^2．

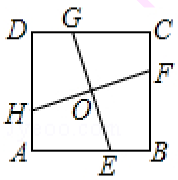


图1

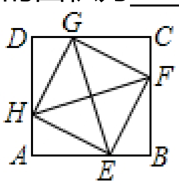


图2

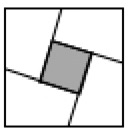


图3

110．（1）如图 1，正方形 ABCD 中，E，F，GH 分别为四条边上的点，并且 AE=BF=CG=DH．求证：四边形 EFGH 为正方形．

（2）如图 2，有一块边长 1 米的正方形钢板，被裁去长为$\frac{1}{4}$米、宽为$\frac{1}{6}$米的矩形两角，现要将剩余部分重新裁成一正方形，使其四个顶点在原钢板边缘上，且 P 点在裁下的正方形一边上，问如何剪裁使得该正方形面积最大，最大面积是多少？

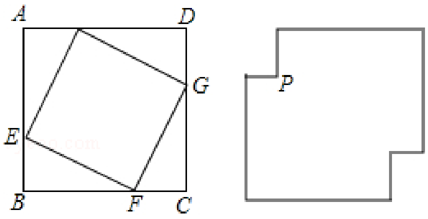


图1　　图2

111．操作示例：

对于边长为 a 的两个正方形 ABCD 和 EFGH，按图 1 所示的方式摆放，在沿虚线 BD，EG 剪开后，可以按图中所示的移动方式拼接为图 1 中的四边形 BNED．

从拼接的过程容易得到结论：

①四边形 BNED 是正方形；

②$S_{\text{正方形 }ABCD}+S_{\text{正方形 }EFGH}=S_{\text{正方形 }BNED}$．

实践与探究：

（1）对于边长分别为 a，b（a＞b）的两个正方形 ABCD 和 EFGH，按图 2 所示的方式摆放，连接 DE，过点 D 作 DM⊥DE，交 AB 于点 M，过点 M 作 MN⊥DM，过点 E 作 EN⊥DE，MN 与 EN 相交于点 N；

①证明四边形 MNED 是正方形，并用含 a，b 的代数式表示正方形 MNED 的面积；

②在图 2 中，将正方形 ABCD 和正方形 EFGH 沿虚线剪开后，能够拼接为正方形 MNED，请简略说明你的拼接方法（类比图 1，用数字表示对应的图形）；

（2）对于 n（n 是大于 2 的自然数）个任意的正方形，能否通过若干次拼接，将其拼接成为一个正方形？请简要说明你的理由．

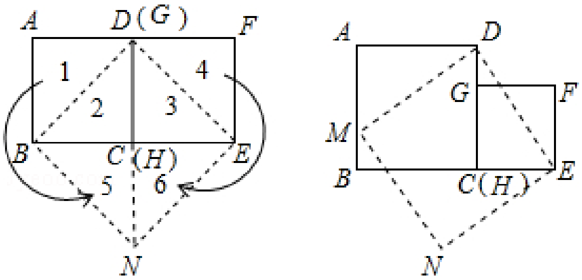


图1　　图2

112．阅读下列材料：

小贝遇到一个有趣的问题：在矩形 ABCD 中，AD=8cm，AB=6cm．现有一动点 P 按下列方式在矩形内运动：它从 A 点出发，沿着 AB 边夹角为 45°的方向作直线运动，每次碰到矩形的一边，就会改变运动方向，沿着与这条边夹角为 45°的方向作直线运动，并且它一直按照这种方式不停地运动，即当 P 点碰到 BC 边，沿着 BC 边夹角为 45°的方向作直线运动，当 P 点碰到 CD 边，再沿着与 CD 边夹角为 45°的方向作直线运动，…，如图 1 所示，

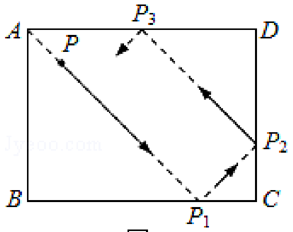


图 1

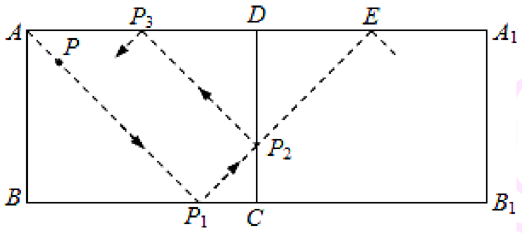


图 2

问 P 点第一次与 D 点重合前与边相碰几次，P 点第一次与 D 点重合时所经过的路径的总长是多少．小贝的思考是这样开始的：如图 2，将矩形 ABCD 沿直线 CD 折叠，得到矩形 A_1B_1CD，由轴对称的知识，发现 $P_2P_3=P_2E$，$P_1A=P_1E$．

请你参考小贝的思路解决下列问题：

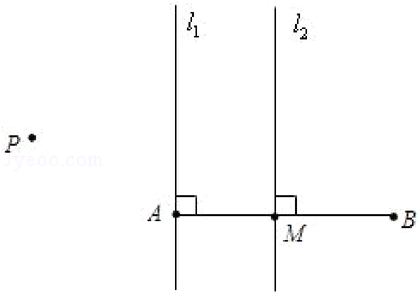
（1）P 点第一次与 D 点重合前与边相碰__________次；P 点从 A 点出发到第一次与 D 点重合时所经过的路径的总长是__________cm；

（2）近一步探究：改变矩形 ABCD 中 AD、AB 的长，且满足 AD＞AB，动点 P 从 A 点出发，按照阅读材料中动点的运动方式，并满足前后连续两次与边相碰的位置在矩形 ABCD 相邻的两边上．若 P 点第一次与 B 点重合前与边相碰 7 次，则 AB：AD 的值为__________．

113．如图，已知线段 AB=2a（a＞0），M 是 AB 的中点，直线 l_1⊥AB 于点 A，直线 l_2⊥AB 于点 M，点 P 是 l_1 左侧一点，P 到 l_1 的距离为 b（a＜b＜2a）．

（1）作出点 P 关于 l_1 的对称点 P_1，并在 PP_1 上取一点 P_2，使点 P_2、P_1 关于 l_2 对称；

（2）PP_2 与 AB 有何位置关系和数量关系，请说明理由．



四边形 143 题---解析

解析：

填空：

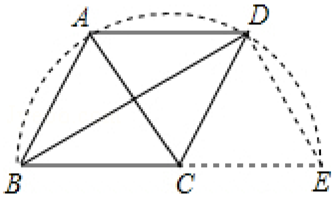
1．解：以点 C 为圆心，BC 的长为半径作圆，延长 BC 交圆 C 于点 E，连结 DE．

∵AD∥BC，∴AB=DE，

∵BE 为直径，∴∠BDE=90°，

在 Rt△BDE 中，BD=$\sqrt{42}$

故答案为：$\sqrt{42}$．



2．解：∵菱形的对角线分别是 16cm、12cm，

∴菱形的边长为 10cm，∴周长=10×4=40cm．

故答案为 40．

3．解：①当较长对角线长为 $2\sqrt{3}$时，则另一对角线长为：$2\times\frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\times 2=2$；

②当较短对角线长为 $2\sqrt{3}$时，则另一对角线长为 $2\times\sqrt{3}\tan 60^\circ=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 2=6$；

故另一条对角线的长为 2 或 6．

4．解：∵菱形 ABCD 的周长等于 24，

∴$AD=\frac{24}{4}=6$，

在 Rt△AOD 中，OH 为斜边上的中线，

∴$OH=\frac{1}{2}AD=3$．

故答案为：3．

5．解：根据“由 A 点开始按 A－＞B－＞C－＞D－＞E－＞F－＞C－＞G－＞A 的顺序沿菱形的边循环运动”可得出，每经过 8 米完成一个循环，

∵2009÷8=251 余 1，

∴行走 2009 米停下，即是在第 252 个循环中行走了一米，即停到了 B 点．

故答案为 B．

6．解：过点 A 作 AE⊥BC 于 E，AF⊥CD 于 F，因为红丝带带宽度相同，

所以 AB∥CD，AD∥BC，AE=AF．

∴四边形 ABCD 是平行四边形．

∵$S_{▱ABCD}$=BC•AE=CD•AF．又 AE=AF．∴BC=CD，∴四边形 ABCD 是菱形．

∵∠B=60°（图 2），作 AE⊥BC 于 E，则 AE 为丝带宽，在 Rt△ABE 中，

AE=1cm，∴sin60°=$\frac{AE}{AB}$，∴AB=$\frac{2\sqrt{3}}{3}$cm，

所以 S 菱形=BC×AE=$\frac{2\sqrt{3}}{3}$cm^2．故答案为：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

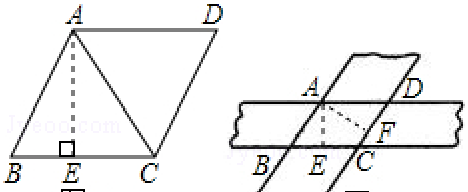


图2 图1

7．解：∵ABCD 是菱形∴AC 为∠DAB 的角平分线

∵PE⊥AB 于点 E，PF⊥AD 于点 F，PF=3cm．∴PE=PF=3cm．故答案为 3．

8．解：设 AP 与 EF 相交于 O 点．

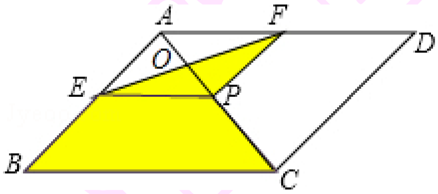
∵ABCD 为菱形，∴BC∥AD，AB∥CD．

∵PE∥BC，PF∥CD，∴PE∥AF，PF∥AE．∴AEFP 是平行四边形．∴$S_{△POF}=S_{△AOE}$．

∴阴影部分的面积就是△ABC 的面积，△ABC 的面积=$\frac{1}{2}$菱形的面积=$\frac{1}{2}$×($\frac{1}{2}$×6×8）

=12，

则阴影部分的面积是 12．故答案为 12．



9．解：AB=8cm，CB=4cm，E 是 DC 的中点，BF=$\frac{1}{4}$BC，∴CE=4，CF=3．

∴四边形 DBFE 的面积=8×4 - 8×4÷2 - 4×3÷2=10cm^2．

10．解：∵MN∥AB

∵矩形 ABCD∴四边形 ABNM、MNCD 是矩形

∴AB=MN=CD，AM=BN，MD=NC

$\therefore S_{阴APM}+S_{阴BPN}=\frac{1}{2}\times MP\times BN+\frac{1}{2}\times PN\times BN=\frac{1}{2}\times AB\times BN$

同理可得：$S_{阴DMQ}+S_{阴CNQ}=\frac{1}{2}\times AB\times NC$

$\therefore S_{阴}=S_{阴DMQ}+S_{阴CNQ}=\frac{1}{2}\times AB\times BN+\frac{1}{2}\times AB\times NC=$

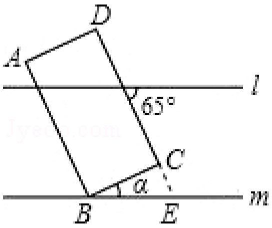
$\frac{1}{2}\times AB\times(BN+NC)=\frac{1}{2}\times AB\times BC=5$.

11．解：延长 DC 交直线 m 于 E．

∵l∥m，∴∠CEB=65°．

在 Rt△BCE 中，∠BCE=90°，∠CEB=65°，

∴∠α=90°－∠CEB=90°－65°=25°．

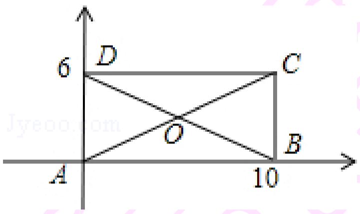


12．解：∵直线 y=mx－3m+2 将四边形 ABCD 分成面积相等的两部分

∴直线必经过矩形的中心对称点 O

∵根据矩形中心对称，可知 O（5，3），将它代入 y=mx－3m+2 中得：

3=5m－3m+2，即 $m=\frac{1}{2}$．



13．解：∵OA=OC，EF⊥AC，∴AE=CE，

∵矩形 ABCD 的周长=2（AE+DE+CD），

∵DE+CD+CE=24，∴矩形 ABCD 的周长=2（AE+DE+CD）=48cm．

14．解：正三角形 ADE 和正三角形 CDF，

∴CF=AB，AE=BC，∠FCB=∠BAE．

∴△FCB≌△BAE，

∴BE=BF．∴BE：BF=1．

15．解：由于这四个小长方体的排列形状不同，所组成的长方体的表面积就不同：

（1）可以排成最顶上是一个边长为 2 的正方形；

（2）可以排成最顶上是一个边长为 4 和 1 的长方形；

（3）可以排成最顶上是一个边长为 6 和 1 长方形；

（4）可以把四个小长方形并排在一起．根据长方体表面积求出．

∴大长方体长宽高分别是；(1) 2，2，3；(2) 4，1，3；(3) 6，1，2；(4) 12，1，1

所以表面积可能有 4 种，分别为 32； 38； 40； 50

答案：有四种，最顶上是一个边长为 2 的正方形时，表面积为 $(3\times2+3\times2+2\times2)\times2=32$，最小为 32．

16 解：由图可看出，每 4 次翻滚一个循环，$AA_3=2(2+1)=6$ 则 $AA_6=6\times2=12$，$AA_9=3\times6=18$，$AA_{12}=4\times6=24$

故答案为 24．

17．解：∵四边形 ABCD 是矩形，∴OA=OC，∠AEO=∠CFO；

又∵∠AOE=∠COF，

在△AOE 和△COF 中，

$\begin{cases}\angle AEO=\angle CFO\\ OA=OC\\ \angle AOE=\angle COF\end{cases}$，∴△AOE≌△COF，∴$S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COF}$，

∴图中阴影部分的面积就是△BCD 的面积．

$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\times CD=\frac{1}{2}\times2\times3=3$．故答案为：3．

18．解：设长方形长的一半为 x．∵$\tan30°=\frac{10}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$x=10\sqrt{3}$，∴长方形长为 $20\sqrt{3}$cm

19．解：由题意可知

△DEO≌△BFO，∴$S_{\triangle DEO}=S_{\triangle BFO}$，

阴影面积=三角形 BOC 面积=$\frac{1}{2}\times2\times1=1$．故答案为：1．

20．解：∵ABCD 是正方形∴AB=AD，∠ABC=∠BAD=90°
∵∠ABC+∠ABF=∠BAD+∠DAE∴∠ABF=∠DAE
在△AFB 和△AED 中
∠ABF=∠DAE，∠AFB=∠AED，AB=AD∴△AFB≌△AED
∴AF=DE=4，BF=AE=3∴EF=AF+AE=4+3=7．故答案为：7．

21．解：设正方形的边长为 1，则正方形四个顶点坐标为 O（0，0），C（0，1），B_1（1，1），A_1（1，0）；
根据正方形对角线定理得 M_1 的坐标为（$1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）；
同理得 M_2 的坐标为（$1-\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{2^2}$）；
M_3 的坐标为（$1-\frac{1}{2^3}$，$\frac{1}{2^3}$），
…，
依此类推：M_n 坐标为（$1-\frac{1}{2^n}$，$\frac{1}{2^n}$）=（$\frac{2^n-1}{2^n}$，$\frac{1}{2^n}$）
故答案为：（$\frac{2^n-1}{2^n}$，$\frac{1}{2^n}$）．

22．解：设底面的正方形的边长为 a，正方形卡片 A，B，C 的边长为 b，
由图 1，得
S_1=（a﹣b）（a﹣b）=（a﹣b）^{2}，
由图 2，得 S_2=（a﹣b）（a﹣b）=（a﹣b）^{2}，∴S_1=S_2故答案为：=．

23．解：∵ABCD 是正方形，∴∠DBC=∠BCA=45°，
∵BP=BC，∴∠BCP=∠BPC=$\frac{1}{2}$（180°﹣45°）=67.5°，
∴∠ACP 度数是 67.5°﹣45°=22.5°．

24．解：正方形 ABCD 的边长为 $16\sqrt{2}$cm，对角线 AC，BD 相交于点 O，
故 OD_1是△ABD 的中位线，即 OD_1=8$\sqrt{2}$，
依此类推，可得 D_2D_3=4$\sqrt{2}$，D_4D_5=2$\sqrt{2}$，D_6D_7=$\sqrt{2}$．
进而可得 OD_1+D_2D_3+D_4D_5+D_6D_7=15$\sqrt{2}$；
故答案为 15$\sqrt{2}$．

25．解：如图，作 $B'F\perp AD$，垂足为 F，$WE\perp B'F$，垂足为 E，

∵四边形 WEFD 是矩形，$\angle BAB'=30°$，

∴$\angle B'AF=60°$，$\angle FB'A=30°$，$\angle WB'E=60°$，

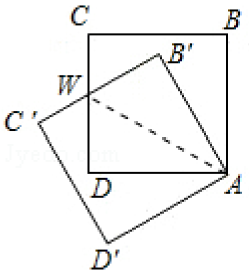
∴$B'F=AB'\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AF=AB'\cos60°=\frac{1}{2}$，$WE=DF=AD-AF=\frac{1}{2}$，

$EB'=WE'\cot60°=\frac{\sqrt{3}}{6}$，$EF=B'F-B'E=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$S_{\triangle B'FA}=\frac{\sqrt{3}}{8}$，$S_{\triangle B'EW}=\frac{\sqrt{3}}{24}$，$S_{WEFD}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

∴公共部分的面积$=S_{\triangle B'FA}+S_{\triangle B'EW}+S_{WEFD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

法 2：连接 AW，如图所示：



根据旋转的性质得：$AD=AB'$，$\angle DAB'=60°$，

在 $Rt\triangle ADW$ 和 $Rt\triangle AB'W$ 中，

∵$\begin{cases}AB'=AD\\AW=AW\end{cases}$，

∴$Rt\triangle ADW\cong Rt\triangle AB'W$（HL），

∴$\angle B'AW=\angle DAW=\frac{1}{2}\angle DAB'=30°$，

又∵$AD=AB'=1$，

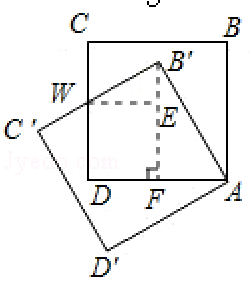
在 $Rt\triangle ADW$ 中，$\tan\angle DAW=\frac{WD}{AD}$，即 $\tan30°=WD$，

解得：$WD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$S_{\triangle ADW}=S_{\triangle AB'W}=\frac{1}{2}WD\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

则公共部分的面积$=S_{\triangle ADW}+S_{\triangle AB'W}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

故答案为$\frac{\sqrt{3}}{3}$．



26．解：∵阴影部分的面积=20－32÷2=4cm²

∴$S_{正方形EFGH}=S_{阴影}+S_{甲乙丙丁的面积和}$=4+32=36cm²∴FG=6cm

∴正方形 EFGH 的周长=24cm

∴甲、乙、丙、丁四个长方形周长的总和=24×2=48cm．故答案为 48．

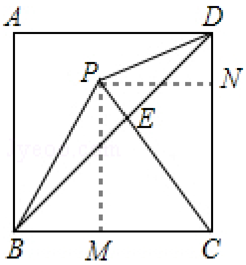
27．解：过 P 作 PM⊥BC 于 M，PN⊥CD 于 N，

∵△BPC 为等边三角形，PM⊥BC，∴CP=CD=2，CM=BM=1，∴PN=CM=1，

由勾股定理得：$PM=\sqrt{CP^2-CM^2}=\sqrt{3}$，

∴△CDP 的面积为$\frac{1}{2}$CD×PN=$\frac{1}{2}$×2×1=1

∴$S_{\triangle BPD}=S_{\triangle BPC}+S_{\triangle CPD}-S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}+1-2\times2\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}+1-2=\sqrt{3}-1$．

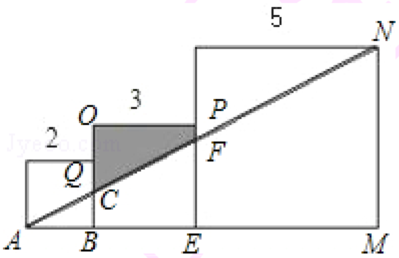


28．解：∵BC∥MN∴$\frac{BC}{MN}=\frac{AB}{AM}$，即$\frac{BC}{5}=\frac{2}{2+3+5}$，解得：BC=1

∵OB=3∴OC=3－1=2

∵BC∥EF∴$\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{AE}$，即$\frac{1}{EF}=\frac{2}{2+3}$，解得：EF=$\frac{5}{2}$∵PE=3∴PF=3－$\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

∴梯形 OCFP 的面积为：$(2+\frac{1}{2})\times3\times\frac{1}{2}$=3.75 故图中阴影部分面积为 3.75．



29．解：∵四边形 ABCD 为正方形，∴∠D=∠ABC=90°，AD=AB∴∠ABE=∠D=90°，

∵∠EAF=90°，∴∠DAF+∠BAF=90°，∠BAE+∠BAF=90°，∴∠DAF=∠BAE，

在△AEB 和△AFD 中，

∵$\begin{cases}\angle EAB=\angle DAF\\ AD=AB\\ \angle ABE=\angle D\end{cases}$，∴△AEB≌△AFD（ASA），∴$S_{\triangle AEB}=S_{\triangle AFD}$，∴它们都加上四边形 ABCF 的面积，可得到四边形 AECF 的面积=正方形的面积=16．故答案为：16．

30．解：设小正方形的边长为 x，则较大的正方形的边长为 1 - x，故两个小正方形的周长和=4x+4（1 - x）=4cm．

故答案为 4．

解答：

1．解：∵矩形周长等于 14，∴2（x+y）=14．

又∵DF=y - $\frac{x}{2}$，DG=x - y，DF=DG，∴y - $\frac{x}{2}$=x - y．

根据题意得：$\begin{cases}2x+2y=14\\x-y=y-\frac{x}{2}\end{cases}$（3 分）解得：$\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$（5 分）答：x 为 4，y 为 3．

2．解：(1) ∵ABCD 为正方形，又 A（1，2)，B（5，2）

则 AB=4，∴C（5，6)，D（1，6)(2 分）

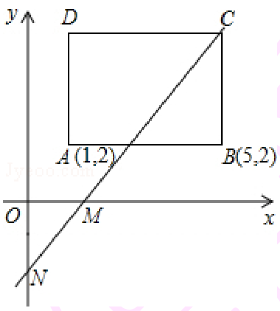
（2）∵y=kx - 2 经过 C 点，∴6=5k - 2，∴k=$\frac{8}{5}$=1.6 （4 分）

（3）y=kx - 2 与 x 轴的交点为 M

y=0 时，kx - 2=0，x=$\frac{2}{k}$，M（$\frac{2}{k}$，0)，N（0， - 2）

又 $S_{\triangle OMA}=\frac{1}{2}|OM|\bullet|ON|=\frac{1}{2}\times|-2|\bullet|\frac{2}{k}|=2$∴|K|=1，k=±1

故 k=±1 时，△OMN 的面积为 2 个单位（少一个 k 值扣 1 分)(6 分)．



3．解：(1）当 0≤x≤1 时，AP=2x，AQ=x，y=$\frac{1}{2}$AQ•AP=x^2，

即 y=x^2．

（2）当 $S_{\text{四边形}ABPQ}=\frac{1}{2}S_{\text{正方形}ABCD}$时，橡皮筋刚好触及钉子，

BP=2x - 2，AQ=x，$\frac{1}{2}$（2x - 2+x）×2=$\frac{1}{2}\times2^2$，∴x=$\frac{4}{3}$．

（3）当 1≤x≤$\frac{4}{3}$时，AB=2，PB=2x - 2，AQ=x，

∴y=$\frac{AQ+BP}{2}\bullet AB=\frac{x+2x-2}{2}\times2$=3x - 2，

即 y=3x - 2．

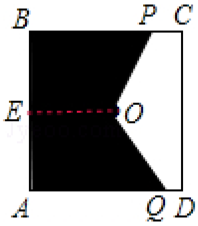
作 OE⊥AB，E 为垂足．

当$\frac{4}{3}$≤x≤2 时，

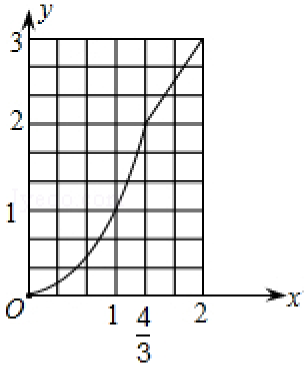
BP=2x - 2，AQ=x，OE=1，$y=S_{梯形BEOP}+S_{梯形OEAQ}=\frac{1+2x-2}{2}\times1+\frac{1+x}{2}\times1=\frac{3}{2}x$，

即 $y=\frac{3}{2}x$．（6 分）

90°≤∠POQ≤180°．



（4）如图所示：



．

4．解：连接 A_3E_2．

∵$A_3A_2=A_1A_2$，$A_2E_2=A_2E_2$，$\angle A_3A_2E_2=\angle A_1A_2E_2=90°$，

∴$Rt\triangle A_3A_2E_2\cong Rt\triangle A_1A_2E_2$（SAS）．

∴$\angle A_3E_2A_2=\angle A_1E_2A_2$．（3 分）

由勾股定理，得$C_4E_5=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}=C_3E_2$，$A_4E_5=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}=A_3E_2$，

∵$A_4C_4=A_3C_3=2$，

∴$\triangle A_4C_4E_5\cong\triangle A_3C_3E_2$（SSS）．

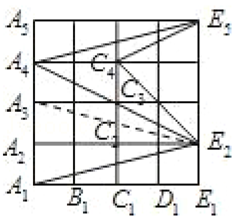
∴$\angle A_3E_2C_3=\angle A_4E_5C_4$．（6 分）

∴$\angle A_1E_2A_2+\angle A_4E_2C_4+\angle A_4E_5C_4=\angle A_3E_2C_4+\angle A_4E_2C_4+\angle A_3E_2C_3=\angle A_2E_2C_4$．

由图可知$\triangle E_2C_2C_4$为等腰直角三角形．

∴$\angle A_2E_2C_4=45$ 度．

即$\angle A_1E_2A_2+\angle A_4E_2C_4+\angle A_4E_5C_4=45°$（9 分）．



5．（1）证明：∵四边形 ABCD 是平行四边形，∴∠4=∠C，AD=CB，AB=CD．

∵点 E、F 分别是 AB、CD 的中点，∴AE=$\frac{1}{2}$AB，CF=$\frac{1}{2}$CD．∴AE=CF．

在△AED 和△CBF 中，

$\begin{cases}AD=CB\\ \angle DAE=\angle C\\ AE=CF\end{cases}$，∴△ADE≌△CBF（SAS）．

（2）解：当四边形 BEDF 是菱形时，四边形 AGBD 是矩形．

证明：∵四边形 ABCD 是平行四边形，∴AD∥BC．

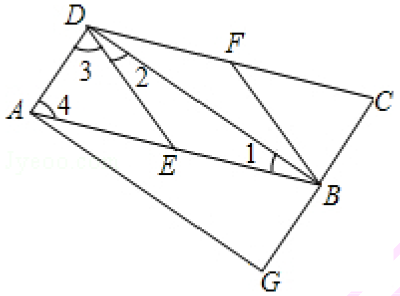
∵AG∥BD，∴四边形 AGBD 是平行四边形．

∵四边形 BEDF 是菱形，∴DE=BE．

∵AE=BE，∴AE=BE=DE．∴∠1=∠2，∠3=∠4．

∵∠1+∠2+∠3+∠4=180°，∴2∠2+2∠3=180°．∴∠2+∠3=90°．即∠ADB=90°．

∴▱四边形 AGBD 是矩形．



6．证明：（1）①∵△ABC 和△ADE 都是等边三角形，

∴AE=AD，AB=AC，∠EAD=∠BAC=60°．

又∵∠EAB=∠EAD - ∠BAD，∠DAC=∠BAC - ∠BAD，

∴∠EAB=∠DAC，

∴△AEB≌△ADC（SAS）．

②方法一：由①得△AEB≌△ADC，

∴∠ABE=∠C=60°．

又∵∠BAC=∠C=60°，

∴∠ABE=∠BAC，

∴EB∥GC．

又∵EG∥BC，

∴四边形 BCGE 是平行四边形．

方法二：证出△AEG≌△ADB，得 EG=AB=BC．

∵EG∥BC，

∴四边形 BCGE 是平行四边形．

（2）①②都成立．
（3）当 CD=CB（$\angle CAD=30°$或$\angle BAD=90°$或$\angle ADC=30°$）时，四边形 BCGE 是菱形．
理由：方法一：由①得$\triangle AEB\cong\triangle ADC$，
$\therefore BE=CD$
又$\because CD=CB$，
$\therefore BE=CB$．
由②得四边形 BCGE 是平行四边形，
$\therefore$四边形 BCGE 是菱形．
方法二：由①得$\triangle AEB\cong\triangle ADC$，
$\therefore BE=CD$．
又$\because$四边形 BCGE 是菱形，
$\therefore BE=CB$
$\therefore CD=CB$．
方法三：$\because$四边形 BCGE 是平行四边形，
$\therefore BE\parallel CG$，$EG\parallel BC$，
$\therefore \angle FBE=\angle BAC=60°$，$\angle F=\angle ABC=60°$
$\therefore \angle F=\angle FBE=60°$，$\therefore\triangle BEF$是等边三角形．
又$\because AB=BC$，四边形 BCGE 是菱形，
$\therefore AB=BE=BF$，
$\therefore AE\perp FG$
$\therefore \angle EAG=30°$，$\because \angle EAD=60°$，$\therefore \angle CAD=30°$．

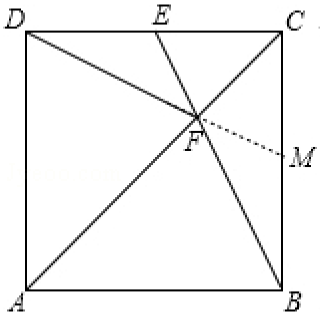
7．解：（1）$\triangle ADF\cong\triangle ABF$，$\triangle ADC\cong\triangle ABC$，$\triangle CDF\cong\triangle CBF$．
（2）$AE\perp DF$．
证明：设 AE 与 DF 相交于点 H．
$\because$四边形 ABCD 是正方形，$\therefore AD=AB$，$\angle DAF=\angle BAF$．
又$\because AF=AF$，$\therefore\triangle ADF\cong\triangle ABF$．$\therefore \angle 1=\angle 2$．
又$\because AD=BC$，$\angle ADE=\angle BCE=90°$，$DE=CE$，$\therefore\triangle ADE\cong\triangle BCE$．$\therefore \angle 3=\angle 4$．
$\because \angle 2+\angle 4=90°$，$\therefore \angle 1+\angle 3=90°$，$\therefore \angle AHD=90°$．$\therefore AE\perp DF$．
（3）$\because \angle ADE=90°$，$AE\perp DF$．
$\therefore \angle 1+\angle 5=90°$，$\angle 3+\angle 1=90°$．$\therefore \angle 3=\angle 5$，
$\because \angle 3=\angle 4$，$\therefore \angle 4=\angle 5$．

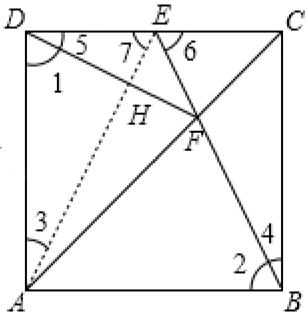
∵DC=BC，∠DCM=∠BCE=90°，∴△DCM≌△BCE．∴CE=CM，

又∵E 为 CD 中点，且 CD=CB，

∴$CE=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}BC$，

∴$CM=\frac{1}{2}CB$，即 M 为 BC 中点，∴BM=MC．





8．（1）证明：∵四边形 ABCD 是正方形，

∴AB=AD，∠B=∠D=90°，

在 Rt△ABE 和 Rt△ADF 中，

∵$\begin{cases} AD=AB \\ AF=AE \end{cases}$，

∴Rt△ADF≌Rt△ABE（HL）

∴BE=DF；

（2）解：四边形 AEMF 是菱形，理由为：

证明：∵四边形 ABCD 是正方形，

∴∠BCA=∠DCA=45°（正方形的对角线平分一组对角），

BC=DC（正方形四条边相等），

∵BE=DF（已证），

∴BC﹣BE=DC﹣DF（等式的性质），

即 CE=CF，

在△COE 和△COF 中，

$\begin{cases} CE=CF \\ \angle ACB=\angle ACD \\ OC=OC \end{cases}$，

∴△COE≌△COF（SAS），

∴OE=OF，又 OM=OA，

∴四边形 AEMF 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形），

∵AE=AF，

∴平行四边形 AEMF 是菱形．

9．解：（1）四边形 OCED 是菱形．

∵DE∥AC，CE∥BD，∴四边形 OCED 是平行四边形，

又在矩形 ABCD 中，OC=OD，∴四边形 OCED 是菱形．

（2）连接 OE．由菱形 OCED 得：CD⊥OE，

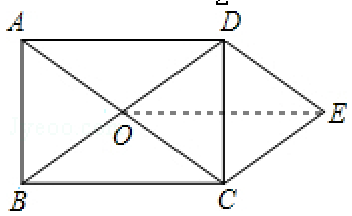
又∵BC⊥CD，

∴OE∥BC（在同一平面内，垂直于同一条直线的两直线平行），

又∵CE∥BD，

∴四边形 BCEO 是平行四边形；∴OE=BC=8（7 分）

∴$S_{\text{四边形 OCED}}=\frac{1}{2}OE\cdot CD=\frac{1}{2}\times8\times6=24$．



10． （1）证明：∵CE 平分∠BCA，∴∠BCE=∠ECP，

又∵MN∥BC，∴∠BCE=∠CEP，∴∠ECP=∠CEP，∴PE=PC；

同理 PF=PC，∴PE=PF；

（2）解：当点 P 运动到 AC 边中点时，四边形 AECF 是矩形．理由如下：

由（1）可知 PE=PF，∵P 是 AC 中点，∴AP=PC，∴四边形 AECF 是平行四边形．

∵CE、CF 分别平分∠BCA、∠ACD，

且∠BCA+∠ACD=180°，

∴$\angle ECF=\angle ECP+\angle PCF=\frac{1}{2}(\angle BCA+\angle ACD)=\frac{1}{2}\times180°=90°$，

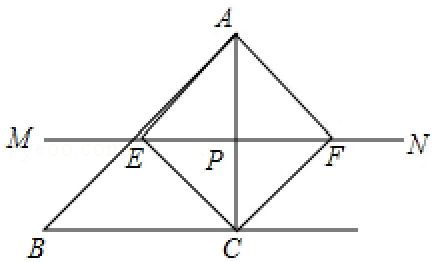
∴平行四边形 AECF 是矩形；

（3）解：若四边形 AECF 是正方形，则 AC⊥EF，AC=2AP．

∵EF∥BC，∴AC⊥BC，∴△ABC 是直角三角形，且∠ACB=90°，

∴$\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴∠BAC=30°．



11．(1) 证明：∵三角板Ⅰ（△ABC）和Ⅱ（$\triangle A_1B_1C_1$）是两块完全相同的三角板，∴$AC=A_1C_1AB=A_1B_1\angle A=\angle A_1$∴在图②中 $A_1B=AB_1$

∴$\triangle A_1BC_1\cong\triangle AB_1C$．

(2) 解：点 B_1 落在 AB 边的中点．理由如下：

如图②所示，由已知条件知 $BC=B_1C_1$，$BC\parallel B_1C_1$

∴四边形 BCB_1C_1 是平行四边形．

要使四边形 BCB_1C_1 是菱形，

则 $BC=CB_1$

∵$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1=60°$，∴$\triangle BCB_1$ 为等边三角形．∴$BB_1=B_1C=BC$，

又∵$\angle A=30°$，在直角三角形 ABC 中，$BC=\frac{1}{2}AB$，∴$BB_1=\frac{1}{2}AB$，

∴点 B_1 落在 AB 边的中点．

12．证明：(1) ∵AD∥FE，∴FE∥BC∴∠FEB=∠2．

∵∠1=∠2，∴∠FEB=∠1．∴BF=EF．

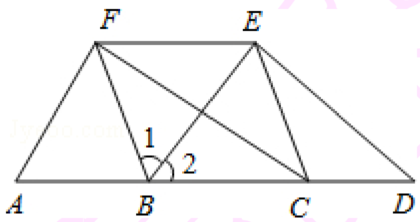
∵BF=BC，∴BC=EF．∴四边形 BCEF 是平行四边形．

∵BF=BC，∴四边形 BCEF 是菱形．

(2) ∵EF=BC，AB=BC=CD，AD∥EF，

∴四边形 ABEF、CDEF 均为平行四边形．∴AF=BE，FC=ED．

又∵AC=BD，∴△ACF≌△BDE．



13．(1) 证明：如图，在△ABC 和△DCB 中，

∵AB=DC，AC=DB，BC=CB，∴△ABC≌△DCB；(4 分)

(2) 解：据已知有 BN=CN．证明如下：

∵CN∥BD，BN∥AC，∴四边形 BMCN 是平行四边形，(6 分)

由 (1) 知，∠MBC=∠MCB，

∴BM=CM（等角对等边），∴四边形 BMCN 是菱形，∴BN=CN．(9 分)

14．解：

（1）如图所示：

（2）证明：∵ABCD 是平行四边形，∴AD∥BC，AD=BC

又∵DE=CF∴AD－DE=BC－CF，

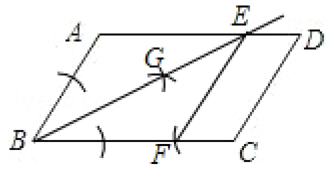
即 AE=BF

∵AE∥BF∴四边形 ABFE 是平行四边形，

又∵BE 平分∠ABC∴∠ABE=∠EBF

又∵AD∥BC∴∠AEB=∠EBF

∴∠ABE=∠AEB∴AB=AE∴▱ABFE 是菱形．



15．（1）证明：∵MN 是 AC 的垂直平分线，∴OA=OC，∠AOD=∠EOC=90°．

∵在 Rt△ADO 与 Rt△CEO 中，

∴$\begin{cases}\angle DAO=\angle ECO\\ \angle AOD=\angle EOC=90^\circ\\ AO=CO\end{cases}$，∴△ADO≌△CEO（AAS）．∴AD=CE．

（2）解：四边形 ADCE 是菱形．

16．解：（1）如图，射线 OB 为所求作的图形．

（2）证明：∵OB 平分∠MON，∴∠AOB=∠BOC．

∵AE∥ON，∴∠ABO=∠BOC．∴∠AOB=∠ABO，AO=AB．

∵AD⊥OB，∴BD=OD．

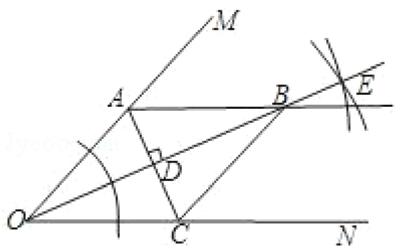
在△ADB 和△CDO 中

∵$\begin{cases}\angle ABD=\angle COD\\ BD=OD\\ \angle ADB=\angle CDO\end{cases}$ ∴△ADB≌△CDO，AB=OC．

∵AB∥OC，∴四边形 OABC 是平行四边形．

∵AO=AB，

∴四边形 OABC 是菱形．



17．解：（1）点 D 是△ABC 的内心．（2 分）

（2）证法一：连接 CD，（3 分）

∵DE∥AC，DF∥BC，∴四边形 DECF 为平行四边形，（4 分）

又∵点 D 是△ABC 的内心，∴CD 平分∠ACB，即∠FCD=∠ECD，（5 分）

又∠FDC=∠ECD，∴∠FCD=∠FDC∴FC=FD，（6 分）∴▱DECF 为菱形．（7 分）

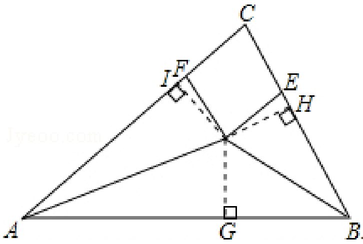
证法二：

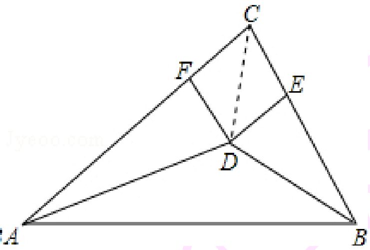
过 D 分别作 DG⊥AB 于 G，DH⊥BC 于 H，DI⊥AC 于 I．（3 分）

∵AD，BD 分别平分∠CAB，∠ABC，∴DI=DG，DG=DH．∴DH=DI．（4 分）

∵DE∥AC，DF∥BC，∴四边形 DECF 为平行四边形，（5 分）

∴$S_{▱DECF}$=CE•DH=CF•DI，∴CE=CF．（6 分）∴▱DECF 为菱形．（7 分）





18．（1）证明：∵AB∥CD，即 AE∥CD，

又∵CE∥AD，∴四边形 AECD 是平行四边形．

∵AC 平分∠BAD，∴∠CAE=∠CAD，

又∵AD∥CE，∴∠ACE=∠CAD，∴∠ACE=∠CAE，∴AE=CE，

∴四边形 AECD 是菱形；

（2）解：△ABC 是直角三角形．

证法一：∵E 是 AB 中点，∴AE=BE．

又∵AE=CE，∴BE=CE，∴∠B=∠BCE，

∵∠B+∠BCA+∠BAC=180°，∴2∠BCE+2∠ACE=180°，∴∠BCE+∠ACE=90°．

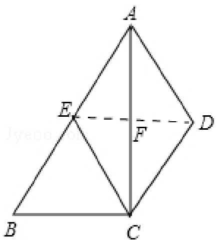
即∠ACB=90°，∴△ABC 是直角三角形．

证法二：连 DE，由四边形 AECD 是菱形，得到 DE⊥AC，且平分 AC，

设 DE 交 AC 于 F，

∵E 是 AB 的中点，且 F 为 AC 中点，∴EF∥BC，∠AFE=90°，∴∠ACB=∠AFE=90°，

∴BC⊥AC，∴△ABC 是直角三角形．



19．证明：方法一：∵AE∥FC．∴∠EAC=∠FCA．

∵在△AOE 与△COF 中，$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO\\ AO=CO\\ \angle AOE=\angle COF\end{cases}$，∴△AOE≌△COF（ASA）．

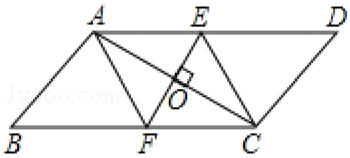
∴EO=FO，∴四边形 AFCE 为平行四边形，

又∵EF⊥AC，∴四边形 AFCE 为菱形；

方法二：同方法一，证得△AOE≌△COF．∴AE=CF．

∴四边形 AFCE 是平行四边形．

又∵EF 是 AC 的垂直平分线，∴EA=EC，∴四边形 AFCE 是菱形；



20．（1）证明：如图，∵AD∥BC，DC∥AB，

∴四边形 ABCD 是平行四边形．

分别过点 A、D 作 AE⊥BC 于 E，DF⊥AB 于 F．

∵两张矩形纸片的宽度相等，∴AE=DF，

又∵AE•BC=DF•AB=$S_{▱ABCD}$，∴BC=AB，∴▱ABCD 是菱形；

（2）解：存在最小值和最大值．（7 分）

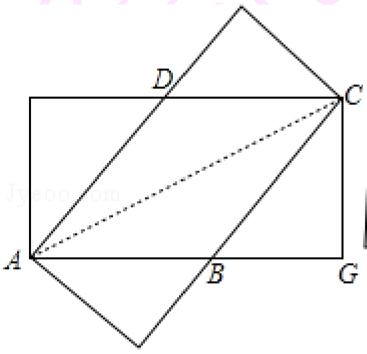
①当∠DAB=90°时，菱形 ABCD 为正方形，周长最小值为 8；（8 分）

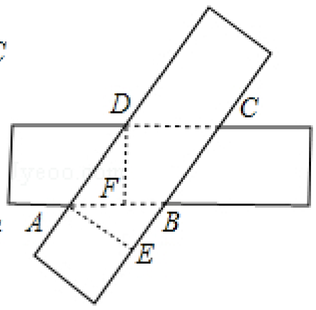
②当 AC 为矩形纸片的对角线时，设 AB=x．如图，

在 Rt△BCG 中，$BC^2=CG^2+BG^2$，

即 $x^2=(8-x)^2+2^2$，$x=\frac{17}{4}$．

∴周长最大值为$\frac{17}{4}\times4=17$．（9 分）





21．解：(1) 四边形 PMCN 不可能是菱形．

点 P 在运动过程中，△PCM 始终是一个直角三角形

斜边 PM 大于直角边 MC∴四边形 PMCN 不可能是菱形

(2) ∵AC=BC=2，AB∥PM，∴AP=BM=x，

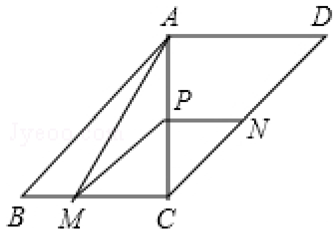
∴$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}\times BM\times AC=\frac{1}{2}\times x\times 2=x$，

∵由已知可得四边形 PMCN 是平行四边形，∴$S_{\text{四边形 }PMCN}=MC\bullet PC=(2-x)^2$

解得 $x_1=1$，$x_2=4$

$x_2=4$ 不符合题意，舍去

当 x=1 时，四边形 PMCN 的面积与△ABM 的面积相等．



22．解：连 AC，设 AC、BD 相交于点 O；

(1) ∵四边形 AECF 是平行四边形，

∴OE=OF，OA=OC，

∵BE=FD，

∴OB=OD．

∴四边形 ABCD 是平行四边形．

(2) ∵四边形 AECF 是菱形，

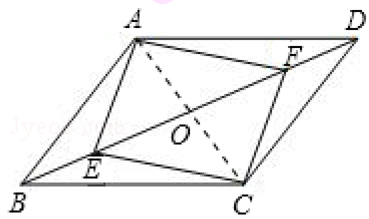
∴OE=OF，OA=OC，AC⊥BD．

∵BE=FD，

∴OB=OD．

∴四边形 ABCD 是菱形．

(3) 四边形 ABCD 不是矩形．



23．(1)解：∵△ABC 为 Rt△，∠A=60°，∴∠C=30°．(1 分)

∴AF=DF=$\frac{1}{2}$FC，即 AF=$\frac{1}{3}$AC．(2 分)

∵FD⊥BC，∴∠BDE 与∠EDF 互余．

而∠EDF=∠A=60°，∴∠BDE=30°．(3 分)

∴BE=$\frac{1}{2}$ED=$\frac{1}{2}$AE，即 BE=$\frac{1}{3}$AB．(4 分)

(2)证明：∵∠BDE=30°，∠B=90°，∴∠BED=60°=∠A，∴ED∥AF．(5 分)

∵AB⊥BC，FD⊥BC，∴FD∥AE．(6 分)∴四边形 AEDF 为平行四边形．(7 分)

又∵AE=ED，∴四边形 AEDF 为菱形．(8 分)

24．(1)证明：∵DE∥AB，∴∠EDC=∠FBD．(1 分)

∵DF∥AC，∴∠FDB=∠ECD．(2 分)

又∵BD=DC，∴△BDF≌△DCE．(3 分)

(2)解：AB=AC 或 BC=AC 或 BA=BC；∠A=90°或∠B=90°或∠C=90°，

(填写其中一个即可，每空(1 分)，共(2 分)

①证明：∵DE∥AB　　DF∥AC，∴四边形 AFDE 为平行四边形．(6 分)

又∵AB=AC，∴∠B=∠C，∴∠EDC=∠C，∴ED=EC．

由△BDF≌△DCE 可得：FD=EC．∴ED=FD，∴四边形 AFDE 为菱形．(7 分)

②证明：同理可证四边形 AFDE 为平行四边形．(6 分)

∵∠A=90，∴四边形 AFDE 为矩形．(7 分)

25．证明：(1)∵AD∥BC，AD=BC(已知)，∴四边形 ABCD 为平行四边形．

又邻边 AD=DC，∴四边形 ABCD 为菱形；(3 分)

(2)证法一：如图：

记 EF 与 AC 交点为 G，EF 与 AB 的交点为 M．

由(1)证得四边形 ABCD 为菱形，

所以对角线 AC 平分∠A，

即∠BAC=∠DAC．

又∵EF⊥AC，AG=AG，∴△AGM≌△AGE，∴AM=AE．(6 分)

又∵E 为 AD 的中点，四边形 ABCD 为菱形，∴AM=BM．∠MAE=∠MBF．

又∵∠BMF=∠AME，∴△BMF≌△AME．∴BF=AE．∴BF=DE．(8 分)

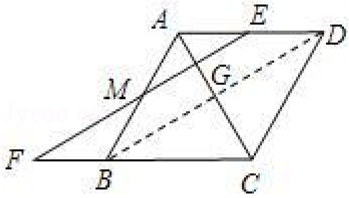
证法二：如图：连接 BD

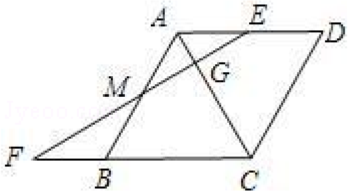
∵四边形 ABCD 为菱形

∴BD⊥AC

∵EF⊥AC∴EF∥BD

∵BF∥DE∴四边形 BDEF 是平行四边形∴BF=DE（8 分）





26．（1）证法一：如图

∵EF 垂直平分 BC，∴BE=EC，BF=CF，

∵CF=BE，∴BE=EC=CF=BF，∴四边形 BECF 是菱形；

证法二：如图

∵EF 垂直平分 BC，∴BD=DC，EF⊥BC

∵BE=CF，∴△BED≌△CFD，∴DE=DF∴四边形 BECF 是菱形；

（2）解法一：

当∠A=45°时，菱形 BECF 是正方形．

∵∠A=45°，∠ACB=90°，∴∠EBC=45°∴∠EBF=2∠EBC=2×45°=90°

∴菱形 BECF 是正方形．

解法二：

当∠A=45°时，菱形 BECF 是正方形．

∵∠A=45°，∠ACB=90°，∴∠EBC=45°，

∵BE=EC，∴∠ECB=∠EBC=45°∴∠BEC=90°，∴菱形 BECF 是正方形．

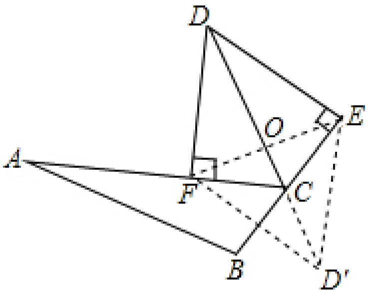
27．（1）证明：∵D 是△ABC 外角∠ACE 的平分线上一点，DF⊥AC 于 F，DE⊥BC 交延长线于 E，∴DF=DE．

∵DC=DC′，∴△DFC≌△DEC．∴CE=CF．

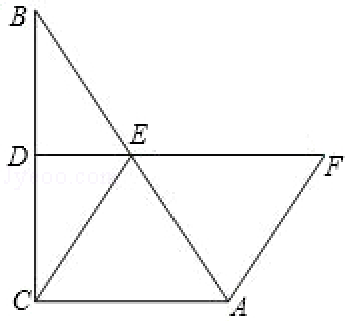
（2）解：连接 EF 交 DC 于点 O，延长 DC 到 D′，使 OD′=DO．

∵△DFC≌△DEC，∴∠FDC=∠EDC，∴DC⊥EF，OE=OF．

∵DO=D′O，∴四边形 DFD′ E 是菱形．



28．证明：∵∠ACB=90°，DE 是 BC 的中垂线，∴DE⊥BC，
又∵AC⊥BC，∴DE∥AC，
又∵D 为 BC 中点，DF∥AC，∴DE 是△ABC 的中位线，∴E 为 AB 边的中点，
∴CE=AE=BE，
∵∠BAC=60°，∴△ACE 为正三角形，
∵∠AEF=∠DEB=∠CAB=60°，
而 AF=CE ,又 CE=AE ,∴AE=AF ,∴△AEF 也为正三角形 ,∴∠CAE=∠AEF=60°，
∴AC$\overset{\parallel}{=}$EF，
∴四边形 ACEF 为平行四边形，
又∵CE=AC，∴▱ACEF 为菱形．



29．（1）证明：在边 AB 上截取 AE=MC，连接 ME．
∵正方形 ABCD 中，∠B=∠BCD=90°，AB=BC．
∴∠NMC=180°﹣∠AMN﹣∠AMB=180°﹣∠B﹣∠AMB=∠MAB=∠MAE，
BE=AB﹣AE=BC﹣MC=BM，
∴∠BEM=45°，∴∠AEM=135°．
∵N 是∠DCP 的平分线上一点，∴∠NCP=45°，∴∠MCN=135°．
在△AEM 与△MCN 中，∠MAE=∠NMC，AE=MC，∠AEM=∠MCN，
∴△AEM≌△MCN（ASA），∴AM=MN．
（2）解：结论 AM=MN 还成立
证明：在边 AB 上截取 AE=MC，连接 ME．
在正△ABC 中，∠B=∠BCA=60°，AB=BC．
∴∠NMC=180°﹣∠AMN﹣∠AMB=180°﹣∠B﹣∠AMB=∠MAE，
BE=AB﹣AE=BC﹣MC=BM，
∴∠BEM=60°，∴∠AEM=120°．
∵N 是∠ACP 的平分线上一点，∴∠ACN=60°，∴∠MCN=120°．
在△AEM 与△MCN 中，∠MAE=∠NMC，AE=MC，∠AEM=∠MCN，

∴△AEM≌△MCN（ASA），∴AM=MN．

（3）解：若将（1）中的“正方形 ABCD”改为“正 n 边形 ABCD…X，则当 ∠AMN=$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$时，结论 AM=MN 仍然成立．

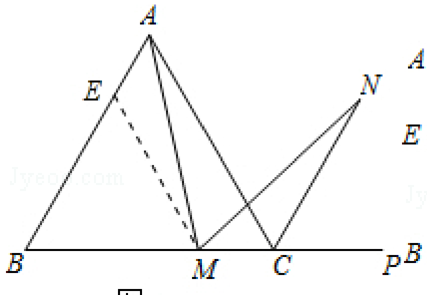


图 2

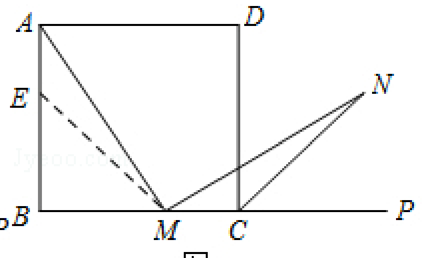


图 1

30．（1）证明：如图，

∵AD=CD，DE=DG，∠ADC=∠GDE=90°，

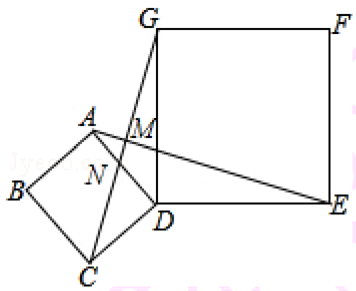
又∵∠CDG=90°+∠ADG=∠ADE，∴△ADE≌△CDG（SAS）．∴AE=CG．

（2）猜想：AE⊥CG．

证明：如图，设 AE 与 CG 交点为 M，AD 与 CG 交点为 N．

∵△ADE≌△CDG，∴∠DAE=∠DCG．

又∵∠ANM=∠CND，∴△AMN∽△CDN．∴∠AMN=∠ADC=90°．∴AE⊥CG．



31．解：（1）60°－α，α，36°－α

（2）存在．下面就所选图形的不同分别给出证明：

选图如，图中有直线 A_0H 垂直平分 A_2B_1，证明如下：

方法一：

证明：∵△$A_0A_1A_2$与△$A_0B_1B_2$是全等的等边三角形

∴$A_0A_2=A_0B_1$∴∠$A_0A_2B_1$=∠$A_0B_1A_2$

又∠A_0A_2H=∠A_0B_1H=60°∴∠HA_2B_1=∠HB_1A_2

∴$A_2H=B_1H$，∴点 H 在线段 A_2B_1 的垂直平分线上

又∵$A_0A_2=A_0B_1$，∴点 A0 在线段 A_2B_1 的垂直平分线上

∴直线 A_0H 垂直平分 A_2B_1

方法二：

证明：∵△$A_0A_1A_2$与△$A_0B_1B_2$是全等的等边三角形

∴$A_0A_2=A_0B_2$

∴$\angle A_0A_2B_1=\angle A_0B_1A_2$

又$\angle A_0A_2H=\angle A_0B_1H=60°$

∴$\angle HA_2B_1=\angle HB_1A_2$

∴$A_2H=B_1H$，

在△A_0A_2H与△A_0B_1H中

∵$A_0A_2=A_0B_1$，

$HA_2=HB_1$，$\angle A0A_2H=\angle A_0B_1H$

∴△A_0A_2H≌△A_0B_1H

∴$\angle A_0A_2H=\angle A_0B_1H$，

∴A_0H是等腰三角形$A_0A_2B_1$的角平分线，

∴直线A_0H垂直平分A_2B_1选图如，图中有直线A_0H垂直平分A_2B_2，证明如下：

∵$A_0B_2=A_0A_2$∴$\angle A_0B_2A_2=\angle A_0A_2B_2$

又∵$\angle A_0B_2B_1=\angle A_0A_2A_3$

∴$\angle HB_2A_2=\angle HA_2B_2$

∴$HB_2=HA_2$

∴点 H 在线段A_2B_2的垂直平分线上

又∵$A_0B_2=A_0A_2$，∴点A_0在线段A_2B_2的垂直平分线上

∴直线A_0H垂直平分A_2B_2

（3）当 n 为奇数时，$\theta_n=\frac{180°}{n}-\alpha$；

当 n 为偶数时，$\theta_n=\alpha$．

（4）存在．

当 n 为奇数时，直线A_0H垂直平分$A_{\frac{n+1}{2}}B_{\frac{n-1}{2}}$，

当 n 为偶数时，直线A_0H垂直平分$A_{\frac{n}{2}}B_{\frac{n}{2}}$

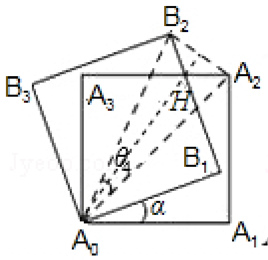


图2

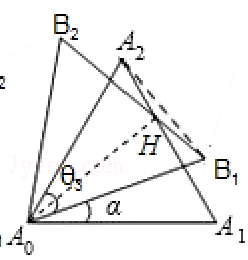


图1

32．（1）证明：在正方形 ABCD 中，∠BCG=90°，BC=CD

在正方形 GCEF 中，∠DCE=90°，CG=CE

在△BCG 和△DCE 中，$\begin{cases} BC=DC \\ \angle BCG=\angle DCE \\ CG=CE \end{cases}$

∴△BCG≌△DCE（SAS）∴∠1=∠2∵∠2+∠DEC=90°∴∠1+∠DEC=90°

∴∠BHD=90°∴BH⊥DE；

（2）解：当 GC=$\sqrt{2}$ - 1 时，BH 垂直平分 DE．理由如下：

连接 EG

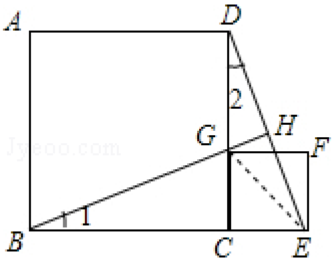
∵BH 垂直平分 DE∴EG=DG

设 CG=x

∵CE=CG，∠DCE=90°∴EG=$\sqrt{2}x$，DG=$\sqrt{2}x$

∵DG+CG=CD

x+$\sqrt{2}$x=1 解得 x=$\sqrt{2}$ - 1∴GC=$\sqrt{2}$ - 1 时，BH 垂直平分 DE．



33．解：（1）过 E 点作 EH⊥BC，垂足为 H，连接 BF，

∵BE=BC=3，∠EBH=45°，∴EH=$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

∵$S_{\triangle BFE}+S_{\triangle BCF}=S_{\triangle BEC}$，∴$\frac{1}{2}$BE×FN+$\frac{1}{2}$BC×FM=$\frac{1}{2}$BC×EH，

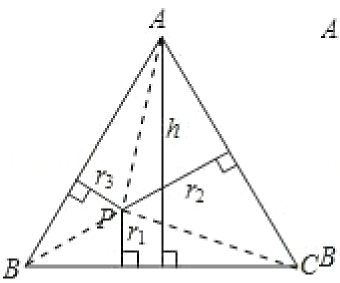
∵BE=BC，∴FN+FM=EH=$\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

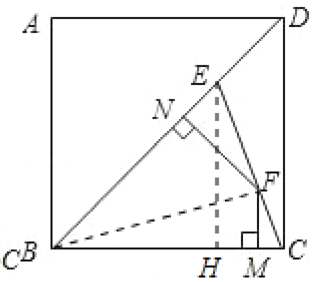
（2）连接 PA，PB，PC，

∵$S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}$，∴$\frac{1}{2}BC\bullet r_1+\frac{1}{2}AC\bullet r_2+\frac{1}{2}AB\bullet r_3=\frac{1}{2}BC\bullet h$，

∵BC=AC=AB，∴$r_1+r_2+r_3=h$．

（3）设 n 边形的边心距为 r，则：$r_1+r_2+\ldots+r_n=nr$（定值）．





34．

解答：解：（1）△ABC 是等腰直角三角形．理由如下：

在△ADC 与△BEC 中，AD=BE，∠D=∠E=90°，DC=EC，

∴△ADC≌△BEC（SAS），

∴AC=BC，∠DCA=∠ECB．

∵AB=2AD=DE，DC=CE，

∴AD=DC，

∴∠DCA=45°，

∴∠ECB=45°，

∴∠ACB=180°﹣∠DCA﹣∠ECB=90°．

∴△ABC 是等腰直角三角形．

（2）DE=AD+BE．理由如下：

在△ACD 与△CBE 中，∠ACD=∠CBE=90°﹣∠BCE，∠ADC=∠BEC=90°，AC=BC，

∴△ACD≌△CBE（AAS），∴AD=CE，DC=EB．∴DC+CE=BE+AD，

即 DE=AD+BE．

（3）DE=BE﹣AD．理由如下：

在△ACD 与△CBE 中，∠ACD=∠CBE=90°﹣∠BCE，∠ADC=∠BEC=90°，AC=BC，

∴△ACD≌△CBE（AAS），

∴AD=CE，DC=EB．

∴DC﹣CE=BE﹣AD，

即 DE=BE﹣AD．

35．（1）证明：在正方形 ABCD 中，

∵BC=CD，∠B=∠CDF，BE=DF，∴△CBE≌△CDF．∴CE=CF．

（2）解：GE=BE+GD 成立．

∵△CBE≌△CDF，∴∠BCE=∠DCF．∴∠ECD+∠ECB=∠ECD+∠FCD．

即∠ECF=∠BCD=90°．

又∠GCE=45°，∴∠GCF=∠GCE=45°．

∵CE=CF，∠GCF=∠GCE，GC=GC，∴△ECG≌△FCG．

∴EG=GF．∴GE=DF+GD=BE+GD．

（3）解：过 C 作 CG⊥AD，交 AD 延长线于 G，

在直角梯形 ABCD 中，

∵$AD\parallel BC$，$\angle A=\angle B=90°$，

又$\angle CGA=90°$，$AB=BC$，∴四边形 ABCG 为正方形．∴$AG=BC=12$．

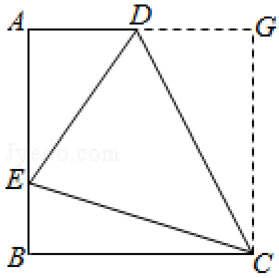
已知$\angle DCE=45°$，根据（1）(2）可知，$ED=BE+DG$，

设 $DE=x$，则 $DG=x-4$，

∴$AD=AG-DG=16-x$，$AE=AB-BE=12-4=8$．

在 Rt△AED 中

∵$DE^2=AD^2+AE^2$，即 $x^2=(16-x)^2+8^2$ 解得：$x=10$．∴$DE=10$．



36．(1）证明：∵△ABD 和△FBC 都是等边三角形，

$BD=BA$，$BF=BC$，$\angle DBA=\angle FBC=60°$，∴$\angle DBA-\angle FBA=\angle FBC-\angle FBA$，

∴$\angle DBF=\angle ABC$．

在△ABC 和△DBF 中，$\begin{cases}BA=BD\\ \angle ABC=\angle DBF\\ BC=BF\end{cases}$∴△ABC≌△DBF．(2 分）∴$AC=DF=AE$．同理△ABC≌△EFC．∴$AB=EF=AD$．(4 分）∴四边形 ADFE 是平行四边形．(6 分）

（2）解：当$\angle BAC=150°$，$\angle DAE=360°-60°-60°-150°=90°$，

∴平行四边形 DAEF 是矩形．

当 $AB=AC\neq BC$，有 $AD=AE$，∴平行四边形 DAEF 是菱形．

当$\angle BAC=60°$，△FBC 与△ABC 重合，故以 D、A、E、F 为顶点的四边形不存在．

37．(1）证明：

①∵四边形 ABCD 是菱形∴$AB=BC$，$\angle ACB=\angle ACF$（2 分）

又∵$\angle B=60°$∴△ABC 是等边三角形（1 分）∴$AB=AC$，$\angle ACB=60°$∴$\angle B=\angle ACF$（1 分）

∵$BE=CF$∴△ABE≌△ACF；(1 分）

②由△ABE≌△ACF∴$AE=AF$，$\angle BAE=\angle CAF$（2 分）

∵$\angle BAE+\angle CAE=60°$∴$\angle CAF+\angle CAE=60°$，即$\angle EAF=60°$

∴△AEF 是等边三角形．(2 分）

（2）答：存在（1 分）

证明：在 CD 延长线上取点 F，使 CF=BE

与（1）①同理可证△ABE≌△ACF（2 分）

∴AE=AF，∠BAE=∠CAF(1 分)∴∠CAF - ∠CAE=∠BAE - ∠CAE，∴∠EAF=∠BAC

∵∠BAC=60°∴∠EAF=60°∴△AEF 是等边三角形．(1 分)

注：若在 CD 延长线上取点 F，使 CE=DF 亦可．

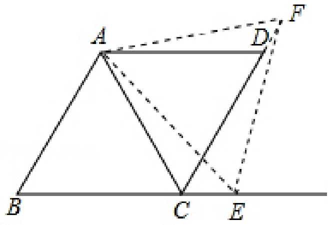


图2

38．证明：

（1）∵∠ADB=90°，∠ABC=45°，

∴∠BAD=∠ABC=45°，∴AD=BD

∵∠BEC=90°，∴∠CBE+∠C=90°，

∵∠DAC+∠C=90°，∴∠CBE=∠DAC，

∵GF∥BD，∴∠AGF=∠ABC=45°，∴∠AGF=∠BAD，∴FA=FG，

∴FG+DC=FA+DF=AD；

解：(2) FG - DC=AD；

（3）如图，

∵∠ABC=135°，∴∠ABD=45°，

∵∠ADB=90°，∴∠DAB=∠DBA=45°，∴AD=BD，

∵FG∥BC，∴∠G=∠DBA=∠DAB，∴AF=FG

∴$AG=5\sqrt{2}$，$FG^2+AF^2=AG^2$，∴FG=AF=5

∵DC=3 由（2）知 FG - DC=AD，∴AD=BD=2，BC=1，DF=3，

∴△FDC 为等腰直角三角形

∴$FC=\sqrt{DF^2+DC^2}=3\sqrt{2}$，

分别过 B，N 作 BH⊥FG 于点 H，NK⊥BG 于点 K，

∴四边形 DFHB 为矩形，

∴HF=BD=2 BH=DF=3，∴BH=HG=3，∴$BG=\sqrt{BH^2+HG^2}=3\sqrt{2}$

∵$\sin G=\frac{NK}{NG}$，∴$NK=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，∴$BK=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

∵∠MBN=∠HBG=45°，∴∠MBH=∠NBK，

∵∠MHB=∠NKB=90°，∴△MBH∽△NBK∴$\frac{MH}{NK}=\frac{BH}{BK}$，∴MH=1，∴FM=1，

∵BC∥FG，∴∠BCF=∠CFN，

∵∠BPC=∠MPF CB=FM，∴△BPC≌△MPF，∴PC=PF=$\frac{1}{2}$FC=$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

∵∠BQC=∠NQF，∴△BCQ∽△NFQ，∴$\frac{BC}{NF}=\frac{CQ}{FQ}$，∴$\frac{CQ}{FQ}=\frac{1}{5-\frac{3}{2}}=\frac{2}{7}$，

∴CQ=$\frac{2}{9}$FC=$\frac{2}{9}\times3\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

∴PQ=CP - CQ=$\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$．

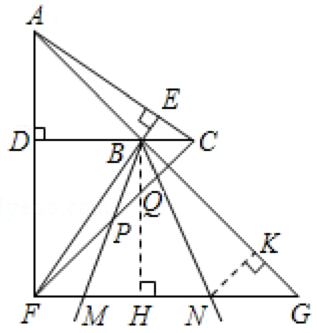


图3

39．解：（1）∵AM=MC=$\frac{\sqrt{2}}{2}$AC=$\frac{\sqrt{2}}{2}$a，则

∴重叠部分的面积是△ACB的面积的一半为$\frac{1}{4}a^2$，周长为（$1+\sqrt{2}$）a．

（2）∵重叠部分是正方形

∴边长为$\frac{1}{2}$a，面积为$\frac{1}{4}a^2$，周长为2a．

（3）猜想：重叠部分的面积为$\frac{1}{4}a^2$．

理由如下：

过点M分别作AC、BC的垂线MH、MG，垂足为H、G

设MN与AC的交点为E，MK与BC的交点为F

∵M是△ABC斜边AB的中点，AC=BC=a∴MH=MG=$\frac{1}{2}$a

又∵∠HME+∠HMF=∠GMF+∠HMF，∴∠HME=∠GMF，

∴Rt△MHE≌Rt△MGF∴阴影部分的面积等于正方形CGMH的面积

∵正方形CGMH的面积是MG•MH=$\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}a^2$∴阴影部分的面积是$\frac{1}{4}a^2$．

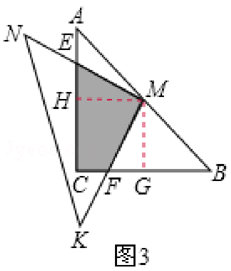


图3

40．解：(1) 如图所示．

(2) ∵∠B=45°，∠AOB=90°∴AO=BO=$\frac{1}{\sqrt{2}}$AB=1

∵菱形 ABCD，∴BC=AB=$\sqrt{2}$∴CO=$\sqrt{2}$ - 1，

由翻折性质知 OB′=OB=1

∴CB′=OB′ - OC=1 - （$\sqrt{2}$ - 1）=2 - $\sqrt{2}$；

(3) ∵菱形 ABCD，∴∠B=∠ECB′=45°，

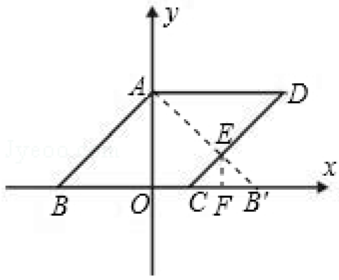
又∵∠B=∠B′=45°

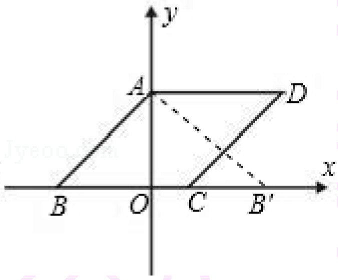
∠CEB′=90°，

过点 E 作 EF⊥B′C 于 F∴EF=CF=$\frac{1}{2}$CB′=1 - $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

∴OF=OC+CF=$\sqrt{2}$ - 1+1 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，(11 分)

∴E（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，1 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$）.(12 分)





41．解：(1) 连 AC 交 BD 于 O，

∵ABCD 为菱形，∴∠AOB=90°，OA=$\frac{h}{2}$，OB=20，(3 分)

在 Rt△AOB 中，

∵$AO^2+BO^2=AB^2$，即（$\frac{h}{2}$）$^2+20^2=30^2$，∴h=20$\sqrt{5}$；(2 分)

(2) 从 a=40 开始，螺旋装置顺时针方向旋转 x 圈，则 BD=40 - x，(2 分)

∴（$\frac{h}{2}$）^{2}+（$\frac{40-x}{2}$）$^2=30^2$，

∴h=$\sqrt{60^2-(40-x)^2}$；(2 分)

(3) 结论：$s_1>s_2$．

在 $h=\sqrt{60^2-(40-x)^2}$中，

令 x=0 得，$h_0=\sqrt{60^2-40^2}\approx44.721$；

令 x=1 得，$h_1=\sqrt{60^2-39^2}\approx45.596$；

令 x=2 得，$h_2=\sqrt{60^2-38^2}\approx46.435$；

∴$s_1=h_1-h_0\approx0.88$，$s_2=h_2-h_1\approx0.84$，

$\therefore s_1 > s_2$；(3 分)

也可以如下比较 s_1、s_2 的大小：

$\because s_1=\sqrt{60^2-39^2}-\sqrt{60^2-40^2}=\dfrac{(60^2-39^2)-(60^2-40^2)}{\sqrt{60^2-39^2}+\sqrt{60^2-40^2}}$

$=\dfrac{79}{\sqrt{99\times 21}+\sqrt{100\times 20}}$

$s_2=\sqrt{60^2-38^2}-\sqrt{60^2-39^2}=\dfrac{(60^2-38^2)-(60^2-39^2)}{\sqrt{60^2-38^2}+\sqrt{60^2-39^2}}$

$=\dfrac{77}{\sqrt{98\times 22}+\sqrt{99\times 21}}$

而 $79 > 77$，$\sqrt{100\times 20}<\sqrt{98\times 22}$

$\therefore s_1 > s_2$；(3 分)

若将条件"从 a=40 开始"改为"从任意时刻开始"，则结论 $s_1 > s_2$ 仍成立．

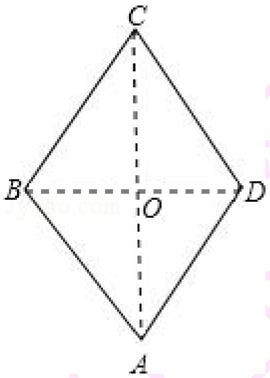
$\because s_1=\sqrt{60^2-(a-1)^2}-\sqrt{60^2-a^2}=\dfrac{2a-1}{\sqrt{60^2-(a-1)^2}+\sqrt{60^2-a^2}}$，

$s_2=\sqrt{60^2-(a-2)^2}-\sqrt{60^2-(a-1)^2}=\dfrac{2a-3}{\sqrt{60^2-(a-2)^2}+\sqrt{60^2-(a-1)^2}}$

，

而 $2a-1 > 2a-3$，$\sqrt{60^2-a^2}<\sqrt{60^2-(a-2)^2}$

$\therefore s_1 > s_2$．(2 分)



42．(1)证明：$\because AC=CE=CB=CD$，$\angle ACB=\angle ECD=90°$，$\therefore \angle A=\angle B=\angle D=\angle E=45°$．

在△BCF 和△ECH 中，$\begin{cases}\angle B=\angle E\\ BC=EC\\ \angle BCE=\angle ECH\end{cases}$，$\therefore$△BCF≌△ECH (ASA)，

$\therefore CF=CH$ (全等三角形的对应边相等)；

(2) 解：四边形 ACDM 是菱形．

证明：$\because \angle ACB=\angle DCE=90°$，$\angle BCE=45°$，$\therefore \angle 1=\angle 2=45°$．

$\because \angle E=45°$，$\therefore \angle 1=\angle E$，$\therefore AC\parallel DE$，

∴$\angle AMH=180°-\angle A=135°=\angle ACD$，

又∵$\angle A=\angle D=45°$，

∴四边形 ACDM 是平行四边形（两组对角相等的四边形是平行四边形），

∵$AC=CD$，∴四边形 ACDM 是菱形．

43．解：（1）$AB=2AD$．

理由如下：

∵直角点 M 为 CD 边的中点，∴$MD=MC$，

又∵$AD=BC$，$\angle D=\angle C=90°$∴$\triangle ADM\cong\triangle BCM$，∴$\angle AMD=\angle BMC$，

∵$\angle AMB=90°$，∴$\angle AMD+\angle BMC=90°$，∴$\angle AMD=\angle BMC=45°$

∴$\angle DAM=\angle AMD=45°$，∴$AD=DM$，∴$AB=2AD$．

（2）如图 2 所示，作 $MH\perp AB$ 于点 H，连接 MN

∵$\angle AMB=90°$，∴$\angle AMD+\angle BMC=90°$，

∵$\angle AMD+\angle DAM=90°$，∴$\angle DAM=\angle BMC$

又∵$\angle D=\angle C$，

∴$\triangle ADM\backsim\triangle MCB$，∴$\frac{AD}{MC}=\frac{DM}{BC}$，即$\frac{\sqrt{3}}{MC}=\frac{4-MC}{\sqrt{3}}$，

∴$MC=1$ 或 3．

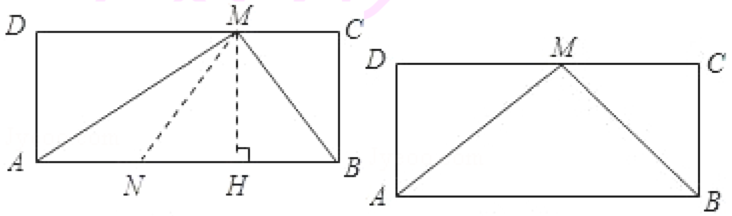
∵点 M，N 分别为矩形 ABCD 边 CD，AB 上的直角点，∴$AN=MC$，

∴当 $MC=1$ 时，$AN=1$，$NH=2$，

∴$MN^2=MH^2+NH^2=(\sqrt{3})^2+2^2=7$，∴$MN=\sqrt{7}$．

当 $MC=3$ 时，此时点 N 与点 H 重合，即 $MN=BC=\sqrt{3}$，

综上，$MN=\sqrt{7}$或$\sqrt{3}$．



（图 2）　　（图 1）

44．解：（1）∵四边形 ABCD 是矩形，$AC=20$，$AB=12$

∴$\angle ABC=90°$，$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16$

∴$S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=12\times16=192$．

（2）∵$OB\parallel B_1C$，$OC\parallel BB_1$，

∴四边形 OBB_1C 是平行四边形．

∵四边形 ABCD 是矩形，∴OB=OC，∴四边形 OBB_1C 是菱形．

∴$OB_1\perp BC$，$A_1B=\frac{1}{2}BC=8$，$OA_1=\frac{1}{2}OB_1=\sqrt{OB^2-A_1B^2}=6$；

∴$OB_1=2OA_1=12$，∴$S_{菱形OBB1C}=\frac{1}{2}BC\bullet OB_1=\frac{1}{2}\times16\times12=96$；

同理：四边形 $A_1B_1C_1C$ 是矩形，

∴$S_{矩形A1B1C1C}=A_1B_1\bullet B_1C_1=6\times8=48$；

……

第 n 个平行四边形的面积是：$S_n=\frac{192}{2^n}$∴$S_6=\frac{192}{2^6}=3$．

45．（1）证法一：连接 BD，则 BD 过点 O，

∵AD∥BC，∴∠OBM=∠ODN，

又 OB=OD，∠BOM=∠DON，∴△OBM≌△ODN，∴BM=DN；

证法二：∵矩形 ABCD 是中心对称图形，点 O 是对称中心，

∴B、D 和 M、N 关于 O 点中心对称，∴BM=DN；

（2）证法一：

∵矩形 ABCD，∴AD∥BC，AD=BC，

又 BM=DN，∴AN=CM，∴四边形 AMCN 是平行四边形，

由翻折得，AM=CM，

∴四边形 AMCN 是菱形；

证法二：由翻折得，AE=CD，∠E=∠D，∠AMN=∠CMN，

又∵∠ANE=∠CND，∴△ANE≌△CND，∴AN=CN．

∵AD∥BC，∴∠ANM=∠CMN，∴∠AMN=∠ANM，∴AM=AN，

∴AM=MC=CN=NA，

∴四边形 AMCN 是菱形．

（3）解法一：∵$S_{\triangle CDN}=\frac{1}{2}DN\bullet CD$，$S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}CM\bullet CD$，

又 $S_{\triangle CDN}:S_{\triangle CMN}=1:3$，

∴DN：CM=1：3，

设 DN=k，则 CN=CM=3k，

过 N 作 NG⊥MC 于点 G，

则 CG=DN=k，MG=CM - CG=2k，

$NG=\sqrt{CN^2-CG^2}=\sqrt{9k^2-k^2}=2\sqrt{2}k$，

∴$MN=\sqrt{MG^2+NG^2}=\sqrt{4k^2+8k^2}=2\sqrt{3}k$，

$\therefore \frac{MN}{DN}=\frac{2\sqrt{3}k}{k}=2\sqrt{3}$；

解法二：$\because S_{\triangle CDN}=\frac{1}{2}DN\bullet CD$，$S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}CM\bullet CD$，

又 $S_{\triangle CDN}:S_{\triangle CMN}=1:3$，

$\therefore DN:CM=1:3$，

连接 AC，则 AC 过点 O，且 AC⊥MN，

设 DN=k，则 CN=AN=CM=3k，AD=4k，

$CD=\sqrt{NC^2-DN^2}=\sqrt{9k^2-k^2}=2\sqrt{2}k$，

$OC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{AD^2+CD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16k^2+8k^2}=\sqrt{6}k$，

$\therefore MN=2ON=2\sqrt{CN^2-OC^2}=2\sqrt{9k^2-6k^2}=2\sqrt{3}k$，

$\therefore \frac{MN}{DN}=\frac{2\sqrt{3}k}{k}=2\sqrt{3}$．

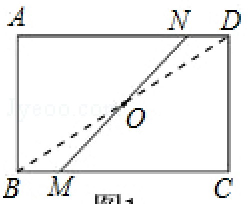


图1

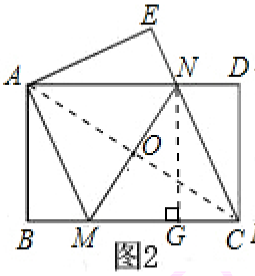


图2

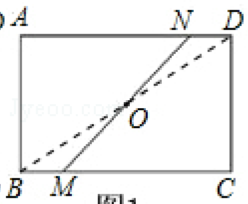


图1

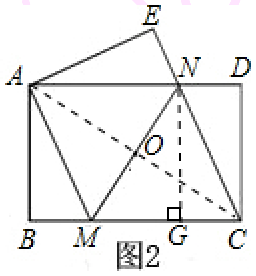


图2

46．解：(1) 如果一个三角形和一个平行四边形满足条件：三角形的一边与平行四边形的一边重合，三角形这边所对的顶点在平行四边形这边的对边上，则称这样的平行四边形为三角形的“友好平行四边形”．

(2) 此时共有 2 个友好矩形，如图的矩形 BCAD、ABEF．

易知，矩形 BCAD、ABEF 的面积都等于△ABC 面积的 2 倍，

∴△ABC 的“友好矩形”的面积相等．

(3) 此时共有 3 个友好矩形，如图的矩形 BCDE、矩形 CAFG 及矩形 ABHK，其中的矩形 ABHK 的周长最小．

证明如下：

易知，这三个矩形的面积相等，令其为 S，设矩形 BCDE、CAFG 及 ABHK 的周长分别为 L_1，L_2，L_3，

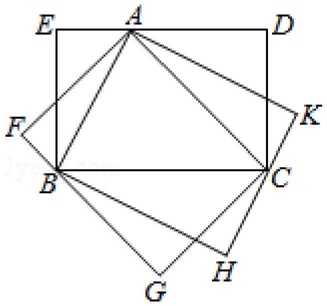
△ABC 的边长 BC=a，CA=b，AB=c，则：

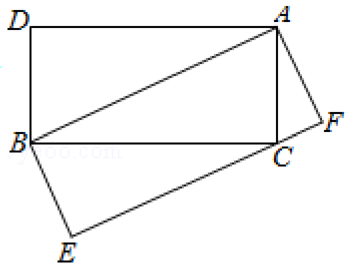
$L_1=\frac{2S}{a}+2a$，$L_2=\frac{2S}{b}+2b$，$L_3=\frac{2S}{c}+2c$，

$\therefore L_1-L_2=\left(\frac{2S}{a}+2a\right)-\left(\frac{2S}{b}+2b\right)=-\frac{2s}{ab}(a-b)+2(a-b)=2(a-b)\bullet\frac{ab-S}{ab}$，

而 $ab>S$，$a>b$，$\therefore L_1-L_2>0$，即 $L_1>L_2$，

同理可得，$L_2 > L_3$，∴L_3最小，即矩形 ABHK 的周长最小．





47．解：（1）∵ABCD 是矩形，

∴MN∥AD，EF∥CD，∴四边形 PEAM、PNCF 也均为矩形，

∴a=PM•PE=S 矩形 PEAM，b=PN•PF=S 矩形 PNCF，

又∵BD 是对角线，∴△PMB≌△BFP，△PDE≌△DPN，△DBA≌△DBC，

∵S 矩形 PEAM=S△BDA﹣S△PMB﹣S△PDE，

S 矩形 PNCF=S△DBC﹣S△BFP﹣S△DPN，∴S 矩形 PEAM=S 矩形 PNCF，∴a=b；

（2）成立，理由如下：

∵ABCD 是平行四边形，MN∥AD，EF∥CD

∴四边形 PEAM、PNCF 也均为平行四边形

根据（1）可证 S 平行四边形 PEAM=S 平行四边形 PNCF，

过 E 作 EH⊥MN 于点 H，

则 $\sin\angle MPE=\frac{EH}{PE}$EH=PE•sin∠MPE，

∴$S_{▱PEAM}$=PM•EH=PM•PEsin∠MPE，

同理可得 $S_{▱PNCF}$=PN•PFsin∠FPN，

又∵∠MPE=∠FPN=∠A，∴sin∠MPE=sin∠FPN，∴PM•PE=PN•PF，

即 a=b；

（3）方法 1：存在，理由如下：

由（2）可知 $S_{▱PEAM}$=AE•AMsinA，$S_{▱ABCD}$=AD•ABsinA，

$$\therefore \frac{S_{平行四边形PEAM}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{2S_{平行四边形PEAM}}{2S_{\triangle ABD}}=\frac{2S_{平行四边形PEAM}}{S_{平行四边形ABCD}}=\frac{2AE\cdot AM\sin A}{AD\cdot AB\sin A}=2\cdot\frac{AE}{AD}\cdot\frac{AM}{AB},$$

又∵$\frac{BP}{PD}=k$，即$\frac{BP}{BD}=\frac{k}{k+1}$，$\frac{PD}{BD}=\frac{1}{k+1}$，

而$\frac{AE}{AD}=\frac{BP}{BD}=\frac{k}{k+1}$，$\frac{AM}{AB}=\frac{PD}{BD}=\frac{1}{k+1}$，

$$\therefore 2\times\frac{k}{k+1}\times\frac{1}{k+1}=\frac{4}{9}$$

即 $2k^2-5k+2=0$，

∴$k_1=2$，$k_2=\frac{1}{2}$．

故存在实数 k=2 或$\frac{1}{2}$，使得$\frac{S_{平行四边形PEAM}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{4}{9}$；

方法 2：存在，理由如下：

连接 AP，设△PMB、△PMA、△PEA、△PED 的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_4，即

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{BM}{AM}=\frac{BP}{PD}$，$\frac{S_3}{S_4}=\frac{AE}{DE}=\frac{BP}{PD}$（8 分）

即$\begin{cases}S_1=kS_2\\S_3=kS_4\\S_2=S_3\end{cases}$∴$\begin{cases}S_1=k^2S_4\\S_2=S_3=kS_4\end{cases}$

∴$\frac{S_{平行四边形PEAM}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{S_2+S_3}{S_1+S_2+S_3+S_4}=\frac{4}{9}$

即$\frac{2kS_4}{(k^2+2k+1)S_4}=\frac{4}{9}$

∴$2k^2-5k+2=0$（9 分）

∴$k_1=2$，$k_2=\frac{1}{2}$

故存在实数 k=2 或$\frac{1}{2}$，使得$\frac{S_{平行四边形PEAM}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{4}{9}$．

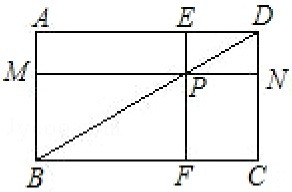


图 1

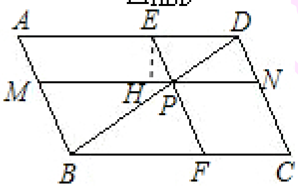


图 2

48．（1）解：∵△ABC 是等边三角形，且 D 是 BC 中点，

∴DA 平分∠BAC，即∠DAB=∠DAC=30°；

∵△DAE 是等边三角形，∴∠DAE=60°；∴∠CAE=∠DAE－∠CAD=30°；

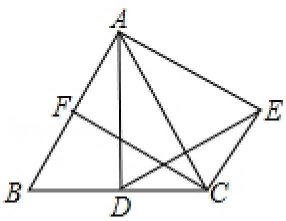
（2）证明：∵△BAC 是等边三角形，F 是 AB 中点，∴CF⊥AB；∴∠BFC=90°

由（1）知：∠CAE=30°，∠BAC=60°；∴∠FAE=90°；∴AE∥CF；

∵△BAC 是等边三角形，且 AD、CF 分别是 BC、AB 边的中线，∴AD=CF；

又 AD=AE，∴CF=AE；∴四边形 AFCE 是平行四边形；

∵∠AFC=∠FAE=90°，∴四边形 AFCE 是矩形．



49．证明：∵四边形 ABDE 是平行四边形，∴AE∥BC，AB=DE，AE=BD．
∵D 为 BC 中点，∴CD=BD．∴CD∥AE，CD=AE．
∴四边形 ADCE 是平行四边形．
∵AB=AC，D 为 BC 中点，∴AD⊥BC，即∠ADC=90°，
∴平行四边形 ADCE 是矩形．

50．(1)证明：在△ABC 中，AB=AC，AD⊥BC，∴∠BAD=∠DAC，
∵AN 是△ABC 外角∠CAM 的平分线，∴∠MAE=∠CAE，
∴$\angle DAE=\angle DAC+\angle CAE=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，
又∵AD⊥BC，CE⊥AN，∴∠ADC=∠CEA=90°，∴四边形 ADCE 为矩形．
(2)当△ABC 满足∠BAC=90°时，四边形 ADCE 是一个正方形．
理由：∵AB=AC，∴∠ACB=∠B=45°，
∵AD⊥BC，∴∠CAD=∠ACD=45°，∴DC=AD，
∵四边形 ADCE 为矩形，∴矩形 ADCE 是正方形．
∴当∠BAC=90°时，四边形 ADCE 是一个正方形．

51．证明：(1)∵CE 平分∠ACB，∴∠BCE=∠OCE，
∵MN∥BC，∴∠BCE=∠OEC，∴∠OEC=∠OCE，∴OE=OC，
同理，OC=OF，∴OC=OE=OF，故 $0C=\frac{1}{2}EF$；
(2)当点 O 位于 AC 边的中点时，四边形 AECF 是矩形．
由(1)知 OE=OF，
又 O 为 AC 边的中点，∴OA=OC，∴四边形 AECF 是平行四边形，
∵$\angle ECO=\frac{1}{2}\angle ACB$，$\angle OCF=\frac{1}{2}\angle ACD$，
∴$\angle ECF=\angle ECO+\angle OCF=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ACD)=90°$，
∴四边形 AECF 是矩形．

52．(1)证明：∵AD 平分∠BAC，∴$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$，
又∵AE 平分∠BAF，∴$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAF$，
∵∠BAC+∠BAF=180°，∴$\angle BAD+\angle BAE=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle BAF)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，
即∠DAE=90°，故 DA⊥AE．
(2)解：AB=DE．理由是：

∵AB=AC，AD 平分∠BAC，∴AD⊥BC，故∠ADB=90°

∵BE⊥AE，∴∠AEB=90°，∠DAE=90°，

故四边形 AEBD 是矩形．∴AB=DE．

53．(1) 证明：∵E 是 AD 的中点，∴AE=DE．

∵AF∥BC，∴∠FAE=∠BDE，∠AFE=∠DBE．

在△AFE 和△DBE 中，

$\begin{cases}\angle FAE=\angle BDE\\ \angle AFE=\angle DBE\\ AE=DE\end{cases}$，∴△AFE≌△DBE（AAS）．∴AF=BD．

∵AF=DC，∴BD=DC．

即：D 是 BC 的中点．

(2) 解：四边形 ADCF 是矩形；

证明：∵AF=DC，AF∥DC，∴四边形 ADCF 是平行四边形．

∵AB=AC，BD=DC，∴AD⊥BC 即∠ADC=90°．∴平行四边形 ADCF 是矩形．

54． (1) 证明：∵CE 平分∠ACB，∴∠1=∠2，

又∵MN∥BC，∴∠1=∠3，∴∠3=∠2，∴EO=CO，

同理，FO=CO，∴EO=FO．

(2) 解：当点 O 运动到 AC 的中点时，四边形 AECF 是矩形．

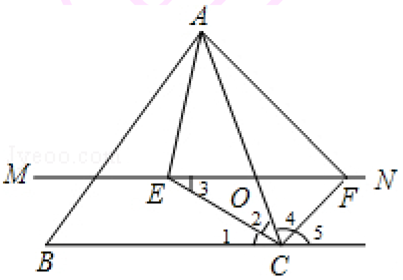
理由：

∵EO=FO，点 O 是 AC 的中点．∴四边形 AECF 是平行四边形，

∵CF 平分∠BCA 的外角，∴∠4=∠5，

又∵∠1=∠2，∴∠2+∠4=$\frac{1}{2}$×180°=90°．

即∠ECF=90°，∴四边形 AECF 是矩形．



55．（1）证明：∵四边形 ABCD 是平行四边形，

∴AB∥CD，AB=CD，

∴∠BAE=∠CFE，∠ABE=∠FCE，

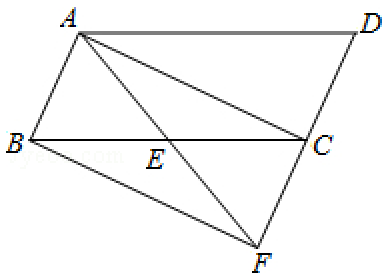
∵E 为 BC 的中点，∴EB=EC，∴△ABE≌△FCE，∴AB=CF．

（2）解：当 BC=AF 时，四边形 ABFC 是矩形．

理由如下：∵AB∥CF，AB=CF，

∴四边形 ABFC 是平行四边形，

∵BC=AF，∴四边形 ABFC 是矩形．



56．证明：（1）∵BE=CF，BF=BE+EF，CE=CF+EF，∴BF=CE．

∵四边形 ABCD 是平行四边形，∴AB=DC．

在△ABF 和△DCE 中，

$\begin{cases} AB=DC \\ BF=CE \\ AF=DE \end{cases}$，∴△ABF≌△DCE（SSS）．

（2）∵△ABF≌△DCE，∴∠B=∠C．

∵四边形 ABCD 是平行四边形，∴AB∥CD．∴∠B+∠C=180°．

∴∠B=∠C=90°．∴四边形 ABCD 是矩形．

57．解：（1）过 A 点作 AG⊥DC，垂足为 G，

∵AB∥CD，∴∠BCD=∠ABC=90°，∴四边形 ABCG 为矩形，

∴CG=AB=5，AG=BC=10，

∵tan∠ADG=$\frac{AG}{DG}$=2，∴DG=5，

∴DC=DG+CG=10；

（2）∵DE=BF，∠FBC=∠CDE，BC=DC，∴△DEC≌△BFC，

∴EC=CF，∠ECD=∠FCB，

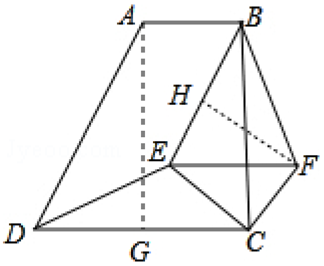
∵∠BCE+∠ECD=90°，∠ECF=90°，∴△ECF 是等腰直角三角形；

（3）过 F 点作 FH⊥BE，

∵BE⊥EC，CF⊥CE，CE=CF，∴四边形 ECFH 是正方形，

∵BE：EC=4：3，∠BEC=90°，∴$BC^2=BE^2+EC^2$，∴EC=6，BE=8，

∴BH=BE - EH=2，∴DE=BF=$\sqrt{FH^2+BH^2}=2\sqrt{10}$．



58．解：(1) 四边形 ABCD 是平行四边形，根据两组对边分别相等；

(2) 四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，根据一组对边平行且相等；

(3) 当点 B 的移动距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$时，四边形 ABC_1D_1 为矩形，根据有一直角的平行四边形是矩形；

当点 B 的移动距离为$\sqrt{3}$时，四边形 ABC_1D_1 为菱形，根据对角线互相垂直平分的四边形是菱形．

59．

(1) 证明：∵四边形 ABCD 是平行四边形

∴AB∥CD

∴∠ABC+∠BCD=180° (1 分)

又∵BE，CF 分别是∠ABC，∠BCD 的平分线

∴∠EBC+∠FCB=90°∴∠BOC=90°故 BE⊥CF (3 分)

(2) 解：AF=DE

理由如下：

∵AD∥BC∴∠AEB=∠CBE

又∵BE 是∠ABC 的平分线，∴∠ABE=∠CBE∴∠AEB=∠ABE∴AB=AE

同理 CD=DF (5 分)

又∵四边形 ABCD 是平行四边形∴AB=CD∴AE=DF∴AF=DE (6 分)

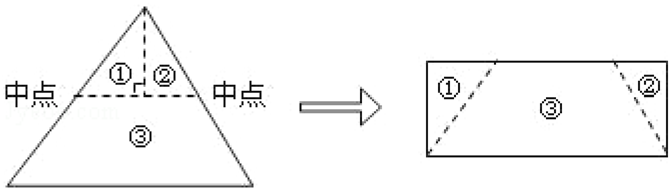
(3) 解：当△BOC 为等腰直角三角形时四边形 ABCD 是矩形．(8 分)

60. 解：方案如下：

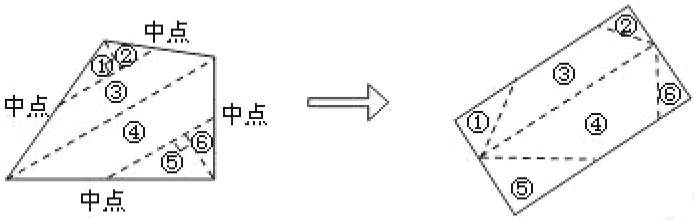
(1) 用卷尺分别比较 AB 与 CD，AD 与 BC 的长度，当 AB=CD，且 AD=BC 时，四边形 ABCD 为平行四边形；否则四边形 ABCD 不是平行四边形，从而不是矩形．

（2）当四边形 ABCD 是平行四边形时，用卷尺比较对角线 AC 与 BD 的长度．当 AC=BD 时，四边形 ABCD 是矩形；否则四边形 ABCD 不是矩形．

61．解：（1）如图所示：



（2）如图所示：



62．证明：（1）∵AB=CD=ED，AD=EB，BD=BD，

∴△ABD≌△EDB；

（2）根据矩形的判定得，可添加 AB∥CD；

∵AB=CD=ED，AB∥CD，∴四边形 ABCD 是平行四边形．

∵BE⊥DE，∴∠E=90°．

∵△ABD≌△EDB，∴∠A=∠E=90°．

∴平行四边形 ABCD 是矩形．

63．（1）证明：在△ADF 和△CDE 中，∵AF∥BE，∴∠FAD=∠ECD．

又∵D 是 AC 的中点，∴AD=CD．

∵∠ADF=∠CDE，∴△ADF≌△CDE．∴AF=CE．

（2）解：若 AC=EF，则四边形 AFCE 是矩形．

证明：由（1）知：AF=CE，AF∥CE，

∴四边形 AFCE 是平行四边形．

又∵AC=EF，∴平行四边形 AFCE 是矩形．

64．（1）证明：连接 OE，

∵四边形 ABCD 是平行四边形，∴DO=OB，

∵四边形 DEBF 是菱形，∴DE=BE，∴EO⊥BD，

∴∠DOE=90°，即∠DAE=90°，

又四边形 ABCD 是平行四边形，∴四边形 ABCD 是矩形．

（2）解：∵四边形 DEBF 是菱形，∴∠FDB=∠EDB，

又由题意知∠EDB=∠EDA，

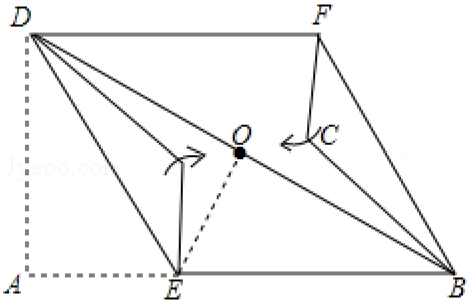
由（1）知四边形 ABCD 是矩形，∴∠ADF=90°，即∠FDB+∠EDB+∠ADE=90°，

则∠ADB=60°，∴在 Rt△ADB 中，有 AD：AB=1：$\sqrt{3}$，

又 BC=AD，

则$\frac{AB}{BC}=\sqrt{3}$．

说明：其他解法酌情给分



65． （1）证明：∵四边形 ABCD 是矩形，∴OA=0B=OC=OD，

∵AE=BF=CG=DH，∴AO﹣AE=OB﹣BF=CO﹣CG=DO﹣DH，

即：OE=OF=OG=OH，∴四边形 EFGH 是矩形；

（2）解：∵G 是 OC 的中点，∴GO=GC，

∵DG⊥AC，∴∠DGO=∠DGC=90°，

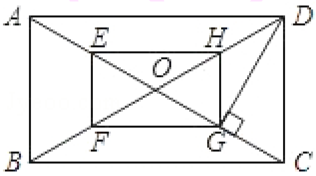
又∵DG=DG，∴△DGC≌△DGO，∴CD=OD，

∵F 是 BO 中点，OF=2cm，∴BO=4cm，

∵四边形 ABCD 是矩形，∴DO=BO=4cm，∴DC=4cm，DB=8cm，

∴CB=$\sqrt{DB^2-DC^2}=4\sqrt{3}$，

∴矩形 ABCD 的面积=4×4$\sqrt{3}$=16$\sqrt{3}$cm^2．



66．解：结论均是 PA^2+PC^2=PB^2+PD^2．

（1）如图 2，过点 P 作 MN∥AB，交 AD 于点 M，交 BC 于点 N，

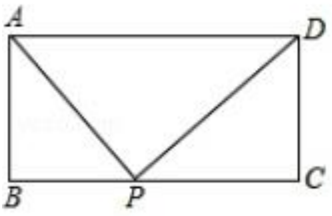


图1

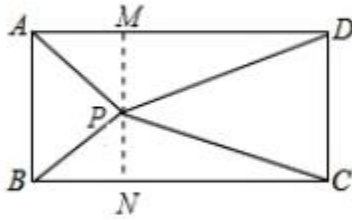


图2

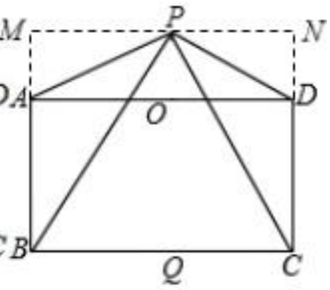


图3

∴四边形 ABNM 和四边形 NCDM 均为矩形，

根据（1）中的结论可得，

在矩形 ABNM 中有 $PA^2+PN^2=PB^2+PM^2$，在矩形 NCDM 中有 $PC^2+PM^2=PD^2+PN^2$，

两式相加得 $PA^2+PN^2+PC^2+PM^2=PB^2+PM^2+PD^2+PN^2$，

∴$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$．

（2）如图 3，过点 P 作 MN∥AB，交 AB 的延长线于点 M，交 CD 的延长线于点 N，

∴四边形 BCNM 和四边形 ADNM 均为矩形，

同样根据（1）中的结论可得，

在矩形 BCNM 中有 $PC^2+PM^2=PB^2+PN^2$，在矩形 ADNM 中有 $PA^2+PN^2=PD^2+PM^2$，

两式相加得 $PA^2+PN^2+PC^2+PM^2=PD^2+PM^2+PB^2+PN^2$，

∴$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$．

67．证明：∵四边形 ABCD 是正方形，∴BC=DC，∠BCD=90°

∵E 为 BC 延长线上的点，∴∠DCE=90°，∴∠BCD=∠DCE．

在△BCF 和△DCE 中，

$\begin{cases}BC=DC\\ \angle BCD=\angle DCE\\ CE=CF\end{cases}$，∴△BCF≌△DCE（SAS），∴DE=BF．

68．证明：过 P 作 PG⊥AB 于点 G，

∵点 P 是正方形 ABCD 的对角线 BD 上一点，∴GP=EP，

在△GPB 中，∠GBP=45°，∴∠GPB=45°，∴GB=GP，

同理，得 PE=BE，

∵AB=BC=GF，∴AG=AB - GB，FP=GF - GP=AB - GB，

∴AG=PF，∴△AGP≌△FPE，∴AP=EF，故①正确；

延长 AP 到 EF 上于一点 H，∴$\angle PAG=\angle PFH$，

∵$\angle APG=\angle FPH$，∴$\angle PHF=\angle PGA=90°$，即 $AP\perp EF$，故②正确；

③∵点 P 是正方形 ABCD 的对角线 BD 上任意一点，$\angle ADP=45$ 度，

∴当$\angle PAD=45$ 度或 67.5 度或 90 度时，$\triangle APD$ 是等腰三角形，

除此之外，$\triangle APD$ 不是等腰三角形，故③错误．∴$\angle PFE=\angle BAP$，故④正确；

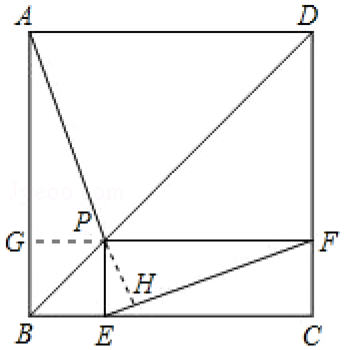
∵$GF\parallel BC$，∴$\angle DPF=\angle DBC$，

又∵$\angle DPF=\angle DBC=45°$，∴$\angle PDF=\angle DPF=45°$，

∴$PF=DF=EC$，∴在 Rt$\triangle DPF$ 中，$DP^2=DF^2+PF^2=EC^2+EC^2=2EC^2$，

∴$DP=\sqrt{2}EC$，故⑤正确．

∴其中正确结论的序号是①②④⑤．



69． （1）证明：∵四边形 ABCD 是正方形，∴$AD=AB$，

∵$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，∴$\triangle ABE\cong\triangle DAF$．

（2）解：∵四边形 ABCD 是正方形，$\angle AGB=30°$，∴$AD\parallel BC$，

∴$\angle 1=\angle AGB=30°$，

∵$\angle 1+\angle 4=\angle DAB=90°$，

∵$\angle 3=\angle 4$，∴$\angle 1+\angle 3=90°$，∴$\angle AFD=180°-(\angle 1+\angle 3)=90°$，

∴$DF\perp AG$，∴$DF=\frac{1}{2}AD=1$，∴$AF=\sqrt{3}$，

∵$\triangle ABE\cong\triangle DAF$，∴$AE=DF=1$，∴$EF=\sqrt{3}-1$．

故所求 EF 的长为$\sqrt{3}-1$．

70．（1）证明：如图，∵四边形 ABCD 为正方形，∴$AB=BC$，$\angle ABC=\angle BCD=90°$，

∴$\angle EAB+\angle AEB=90°$．

∵$\angle EOB=\angle AOF=90°$，∴$\angle FBC+\angle AEB=90°$，∴$\angle EAB=\angle FBC$，∴$\triangle ABE\cong\triangle BCF$，

∴$BE=CF$；

（2）解：方法 1：如图，过点 A 作 $AM\parallel GH$ 交 BC 于 M，

过点 B 作 $BN\parallel EF$ 交 CD 于 N，AM 与 BN 交于点 O′，

则四边形 AMHG 和四边形 BNFE 均为平行四边形，∴EF=BN，GH=AM，

∵∠FOH=90°，AM∥GH，EF∥BN，∴∠NO′A=90°，

故由（1）得，△ABM≌△BCN，∴AM=BN，

∴GH=EF=4；

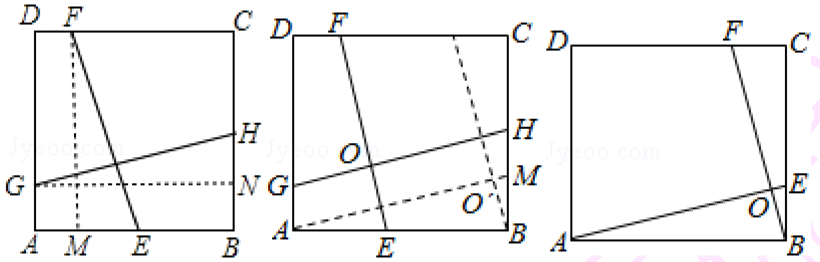
方法 2：过点 F 作 FM⊥AB 于 M，过点 G 作 GN⊥BC 于 N，

得 FM=GN，由（1）得，∠HGN=∠EFM，

得△FME≌△GNH，

得 FE=GH=4．

（3）①∵是两个正方形，则 GH=2EF=8，②4n．



71．证明：在正方形 ABEF 中和正方形 BCMN 中，

AB=BE=EF，BC=BN，∠FEN=∠EBC=90°，

∵AB=2BC，即 BC=BN=$\frac{1}{2}$AB，∴BN=$\frac{1}{2}$BE，即 N 为 BE 的中点，

∴EN=NB=BC，∴△FNE≌△EBC，∴FN=EC．

72．

（1）证明：在正方形 ABCD 中，AO=BO，∠AOB=90°，∠OAB=∠OBC=45°，

∵∠AOE+∠EOB=90°，∠BOF+∠EOB=90°，

∴∠AOE=∠BOF．

在△AOE 和△BOF 中$\begin{cases}\angle OAE=\angle OBF\\ OA=OB\\ \angle AOE=\angle BOF\end{cases}$，

∴△AOE≌△BOF．

（2）答：两个正方形重叠部分面积等于$\frac{1}{4}a^2$，

因为△AOE≌△BOF，

所以：$S_{四边形OEBF}=S_{\triangle EOB}+S_{\triangle OBF}=S_{\triangle EOB}+S_{\triangle AOE}=S_{\triangle AOB}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{4}a^2$．

73．（1）证明：∵△ABE 是等边三角形，∴BA=BE，∠ABE=60°．

∵∠MBN=60°，∴∠MBN﹣∠ABN=∠ABE﹣∠ABN．

即∠MBA=∠NBE．

又∵MB=NB，∴△AMB≌△ENB（SAS）．

（2）解：①当 M 点落在 BD 的中点时，A、M、C 三点共线，AM+CM 的值最小．

②如图，连接 CE，当 M 点位于 BD 与 CE 的交点处时，

AM+BM+CM 的值最小．

理由如下：连接 MN，由（1）知，△AMB≌△ENB，∴AM=EN，

∵∠MBN=60°，MB=NB，∴△BMN 是等边三角形．∴BM=MN．

∴AM+BM+CM=EN+MN+CM．

根据“两点之间线段最短”，得 EN+MN+CM=EC 最短

∴当 M 点位于 BD 与 CE 的交点处时，AM+BM+CM 的值最小，即等于 EC 的长．

（3）解：过 E 点作 EF⊥BC 交 CB 的延长线于 F，

∴∠EBF=∠ABF﹣∠ABE=90°﹣60°=30°．

设正方形的边长为 x，则 BF=$\frac{\sqrt{3}}{2}$x，EF=$\frac{x}{2}$．

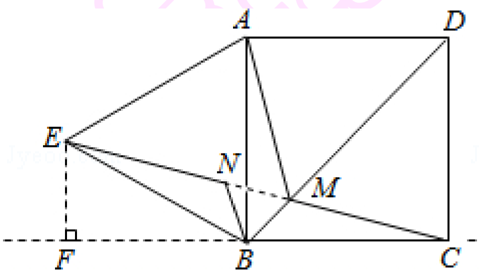
在 Rt△EFC 中，

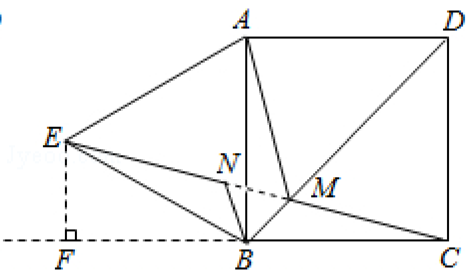
∵$EF^2+FC^2=EC^2$，

∴$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+x\right)^2=(\sqrt{3}+1)^2$．

解得，$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$（舍去负值）．

∴正方形的边长为$\sqrt{2}$．





74．解：（1）AP=EF，AP⊥EF，理由如下：

连接 AC，则 AC 必过点 O，延长 FO 交 AB 于 M；

∵OF⊥CD，OE⊥BC，且四边形 ABCD 是正方形，∴四边形 OECF 是正方形，

∴OM=OF=OE=AM，

∵∠MAO=∠OFE=45°，∠AMO=∠EOF=90°，∴△AMO≌△FOE（AAS），

∴AO=EF，且∠AOM=∠OFE=∠FOC=45°，即 OC⊥EF，

故 AP=EF，且 AP⊥EF．

（2）题（1）的结论仍然成立，理由如下：

延长 AP 交 BC 于 N，延长 FP 交 AB 于 M；

∵PM⊥AB，PE⊥BC，∠MBE=90°，且∠MBP=∠EBP=45°，

∴四边形 MBEP 是正方形，∴MP=PE，∠AMP=∠FPE=90°；

又∵AB﹣BM=AM，BC﹣BE=EC=PF，且 AB=BC，BM=BE，∴AM=PF，

∴△AMP≌△FPE（SAS），

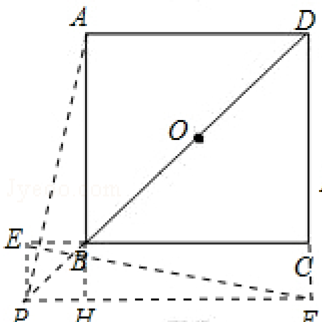
∴AP=EF，∠APM=∠FPN=∠PEF

∵∠PEF+∠PFE=90°，∠FPN=∠PEF，∴∠FPN+∠PFE=90°，即 AP⊥EF，

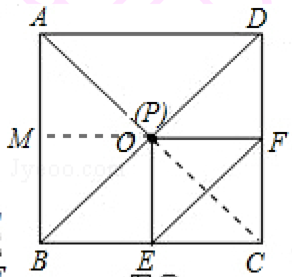
故 AP=EF，且 AP⊥EF．

（3）题（1）（2）的结论仍然成立；

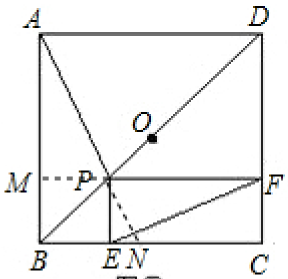
如右图，延长 AB 交 PF 于 H，证法与（2）完全相同．



图③



图①

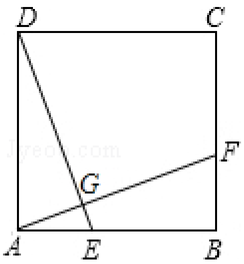


图②

75．证明：∵四边形 ABCD 为正方形，∴DA=AB，∠DAE=∠ABF=90°，

又∵AE=BF，∴△DAE≌△ABF，∴∠ADE=∠BAF，（4 分）

∵∠ADE+∠AED=90°，∴∠FAE+∠AED=90°，∴∠AGE=90°，∴AF⊥DE．（3 分）



76．线段 AE 与 EF 的数量关系为：AE=EF．

证明：

∵四边形 ABCD 是正方形，∴AB=BC，∠BAD=∠HAD=∠DCE=90°，

又∵EF⊥AE，∴∠AEF=90°，

∵AD∥BC∴∠DAE=∠AEB（两直线平行，内错角相等）

∴∠HAE=∠HAD+∠DAE=∠AEF+∠BEA=∠CEF，

又∵△HEB 是以∠B 为直角的等腰直角三角形，

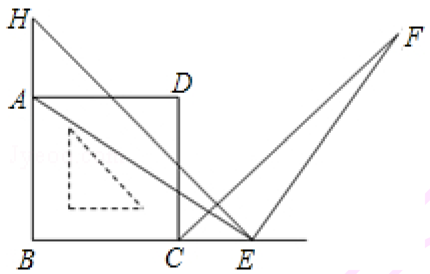
∴BH=BE，∠H=45°，HA=BH﹣BA=BE﹣BC=EC，

又∵CF 平分∠DCE，

∴∠FCE=45°=∠EHA，

在△HAE 和△CEF 中 $\begin{cases}\angle EHA=\angle FCE\\ AH=EC\\ \angle HAE=\angle CEF\end{cases}$

∴△HAE≌△CEF（ASA），∴AE=EF．



77．解：（1）如图 2，延长 FP 交 AB 于点 Q，

①∵AC 是正方形 ABCD 对角线，

∴∠QAP=∠APQ=45°，

∴AQ=PQ，

∵AB=QF，

∴BQ=PF，

∵PE⊥PB，

∴∠QPB+∠FPE=90°，

∵∠QBP+∠QPB=90°，

∴∠QBP=∠FPE，

∵∠BQP=∠PFE=90°，

∴△BQP≌△PFE，

∴QP=EF，

∵AQ=DF，

∴DF=EF；

②如图 2，过点 P 作 PG⊥AD．

∵PF⊥CD，∠PCF=∠PAG=45°，

∴△PCF 和△PAG 均为等腰直角三角形，

∵四边形 DFPG 为矩形，

∴PA=$\sqrt{2}$PG，PC=$\sqrt{2}$CF，

∵PG=DF，DF=EF，

∴PA=$\sqrt{2}$EF，

∴PC=$\sqrt{2}$CF=$\sqrt{2}$（CE+EF）=$\sqrt{2}$CE+$\sqrt{2}$EF=$\sqrt{2}$CE+PA，

即 PC、PA、CE 满足关系为：PC=$\sqrt{2}$CE+PA；

（2）结论①仍成立；结论②不成立，此时②中三条线段的数量关系是 PA - PC=$\sqrt{2}$CE．

如图 3：

①∵PB⊥PE，BC⊥CE，

∴B、P、C、E 四点共圆，

∴∠PEC=∠PBC，

在△PBC 和△PDC 中有：BC=DC（已知），∠PCB=∠PCD=45°（已证），PC 边公共边，

∴△PBC≌△PDC（SAS），

∴∠PBC=∠PDC，

∴∠PEC=∠PDC，

∵PF⊥DE，

∴DF=EF；

②同理：PA=$\sqrt{2}$PG=$\sqrt{2}$DF=$\sqrt{2}$EF，PC=$\sqrt{2}$CF，

∴PA=$\sqrt{2}$EF=$\sqrt{2}$（CE+CF）=$\sqrt{2}$CE+$\sqrt{2}$CF=$\sqrt{2}$CE+PC

即 PC、PA、CE 满足关系为：PA - PC=$\sqrt{2}$CE．

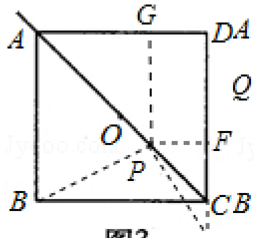


图3

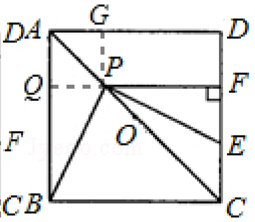
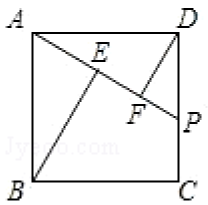


图2

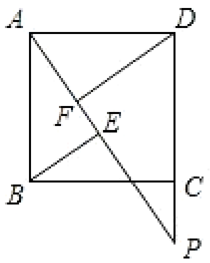
78．解：（1）在图①中 BE、DF、EF 这三条线段长度具有这样的数量关系：BE－DF=EF；

在图②中 BE、DF、EF 这三条线段长度具有这样的数量关系：DF－BE=EF；

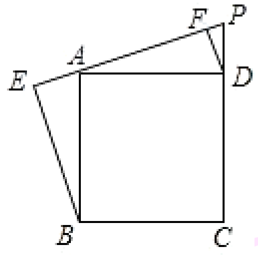
在图③中 BE、DF、EF 这三条线段长度具有这样的数量关系：DF+BE=EF．



图①



图②



图③

（2）对图①中结论证明如下：

∵BE⊥PA，DF⊥PA，∴∠BEA=∠AFD=90°，

∵四边形 ABCD 是正方形，∴AB=AD，∠BAD=90°，

∴∠BAE+∠DAF=90°，

又∵∠AFD=90°，∴∠ADF+∠DAF=90°，∴∠BAE=∠ADF，

∵在△BAE 和△ADF 中，

$$\begin{cases}\angle BEA=\angle AFD\\ \angle BAE=\angle ADF\\ AB=DA\end{cases},$$

∴△BAE≌△ADF（AAS），

∴BE=AF，AE=DF，

∵AF－AE=EF，

∴BE－DF=EF．

79．（1）证明：∵四边形 ABCD 和四边形 AEFG 是正方形，

∴AB=AD，AE=AG，∠BAD=∠EAG=90°，

∴∠BAE+∠EAD=∠DAG+∠EAD，∴∠BAE=∠DAG，∴△BAE≌△DAG．

（2）解：∠FCN=45°，

理由是：作 FH⊥MN 于 H，

∵∠AEF=∠ABE=90°，∴∠BAE+∠AEB=90°，∠FEH+∠AEB=90°，

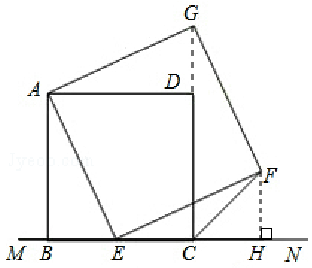
∴∠FEH=∠BAE，

又∵AE=EF，∠EHF=∠EBA=90°，

∴△EFH≌△ABE，∴FH=BE，EH=AB=BC，∴CH=BE=FH，

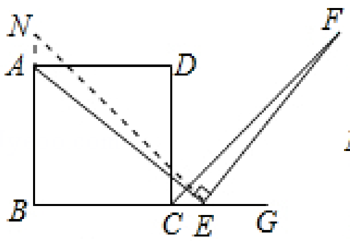
∵∠FHC=90°，∴∠FCN=45°．

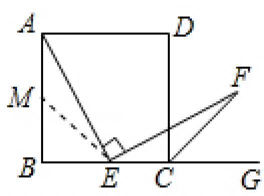
（3）解：当点 E 由 B 向 C 运动时，∠FCN 的大小总保持不变，
理由是：作 FH⊥MN 于 H，
由已知可得∠EAG=∠BAD=∠AEF=90°，
结合（1）（2）得∠FEH=∠BAE=∠DAG，
又∵G 在射线 CD 上，
∠GDA=∠EHF=∠EBA=90°，
∴△EFH≌△GAD，△EFH∽△ABE，∴EH=AD=BC=b，∴CH=BE，∴$\frac{EH}{AB}=\frac{FH}{BE}=\frac{FH}{CH}$；
在 Rt△FEH 中，tan∠FCN=$\frac{FH}{CH}=\frac{EH}{AB}=\frac{b}{a}$，
∴当点 E 由 B 向 C 运动时，∠FCN 的大小总保持不变，tan∠FCN=$\frac{b}{a}$．



图（1）

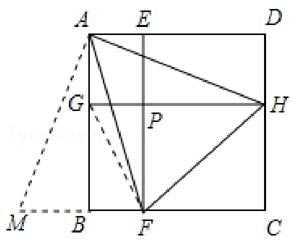
80．解：（1）正确．
证明：在 AB 上取一点 M，使 AM=EC，连接 ME．
∴BM=BE，∴∠BME=45°，∴∠AME=135°，
∵CF 是外角平分线，∴∠DCF=45°，∴∠ECF=135°，∴∠AME=∠ECF，
∵∠AEB+∠BAE=90°，∠AEB+∠CEF=90°，∴∠BAE=∠CEF，
∴△AME≌△ECF（ASA），∴AE=EF．
（2）正确．
证明：在 BA 的延长线上取一点 N．
使 AN=CE，连接 NE．∴BN=BE，∴∠N=∠NEC=45°，
∵CF 平分∠DCG，∴∠FCE=45°，∴∠N=∠ECF，
∵四边形 ABCD 是正方形，∴AD∥BE，∴∠DAE=∠BEA，
即∠DAE+90°=∠BEA+90°，∴∠NAE=∠CEF，
∴△ANE≌△ECF（ASA），∴AE=EF．





81（1）证明：在正方形 ABCD 中，AB=AD，∠BAD=90°，∴∠BAF+∠DAE=90°．
在 Rt△ABF 中，∠BAF+∠ABF=90°，∴∠ABF=∠DAE．
在△ABF 与△DAE 中
$$\begin{cases}\angle ABF=\angle DAE\\ \angle AFB=\angle DEA=90^\circ\\ AB=DA\end{cases}$$，∴△ABF≌△DAE（AAS）．
（2）解：EF=AF－BF．
∵△ABF≌△DAE，∴AE=BF，
∵EF=AF－AE，∴EF=AF－BF．
（3）解：△ABF≌△DAE．EF=BF－AF．
证明：在正方形 ABCD 中，AB=AD，∠BAD=90°，∴∠BAF+∠DAE=90°．
在 Rt△ABF 中，∠BAF+∠ABF=90°，∴∠ABF=∠DAE．
在△ABF 与△DAE 中
$$\begin{cases}\angle ABF=\angle DAE\\ \angle AFB=\angle DEA=90^\circ\\ AB=DA\end{cases}$$，∴△ABF≌△DAE（AAS）．∴AE=BF，
∴EF=AE－AF=BF－AF．

82．（1）证明：连接 AH、AF．
∵ABCD 是正方形，∴AD=AB，∠D=∠B=90°．
∵ADHG 与 ABFE 都是矩形，∴DH=AG，AE=BF，
又∵AG=AE，∴DH=BF．
在 Rt△ADH 与 Rt△ABF 中，
∵AD=AB，∠D=∠B=90°，DH=BF，∴Rt△ADH≌Rt△ABF，∴AF=AH．
（2）证明：将△ADH 绕点 A 顺时针旋转 90°到△ABM 的位置．
在△AMF 与△AHF 中，
∵AM=AH，AF=AF，
∠MAF=∠MAH－∠FAH=90°－45°=45°=∠FAH，∴△AMF≌△AHF．
∴MF=HF．
∵MF=MB+BF=HD+BF=AG+AE，∴AG+AE=FH．



（3）解：设 BF=x，GB=y，则 FC=1－x，AG=1－y，（0＜x＜1，0＜y＜1）

在 Rt△GBF 中，$GF^2=BF^2+BG^2=x^2+y^2$

∵Rt△GBF 的周长为 1，

∴$BF+BG+GF=x+y+\sqrt{x^2+y^2}=1$

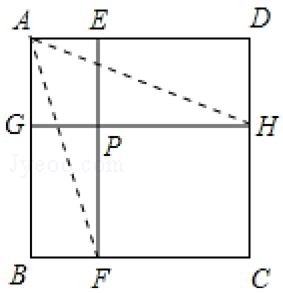
即$\sqrt{x^2+y^2}=1-(x+y)$

即 $x^2+y^2=1-2(x+y)+(x+y)^2$

整理得 $2xy-2x-2y+1=0$∴$xy-x-y=-\frac{1}{2}$，

∴矩形 EPHD 的面积 $S=PH\bullet EP=FC\bullet AG=(1-x)(1-y)=xy-x-y+1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$，

∴矩形 EPHD 的面积是$\frac{1}{2}$．



83．解：（1）如图①结论：AE=MP+NQ．（2 分）

证明：过 Q 作 QQ'⊥AB 于 Q'，

则∠MQ′Q=90°，

∵MN⊥AB，∴∠AMN=90°，

∵四边形 ABCD 为正方形，∴∠BAD=∠ADC=90°，

∴四边形 AMND 为矩形，∴MN=AD=AB，∴∠Q′MN=∠QNM=90°，

∴四边形 MNQQ′为矩形，∴QQ′=MN=AB，NQ=Q′M，（3 分）

在△BAE 和△QQ′P 中，

∵PQ⊥BE，∴∠Q′QP+∠Q′PQ=90°，

∵∠ABE+∠Q′PQ=90°，∴∠Q′QP=∠ABE，（4 分）

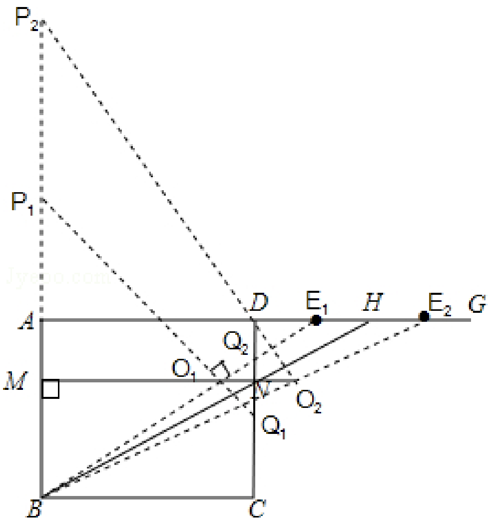
∵∠PQ′Q=∠BAE=90°，QQ′=AB，∴△BAE≌△QQ′P．（5 分）∴Q′P=AE，

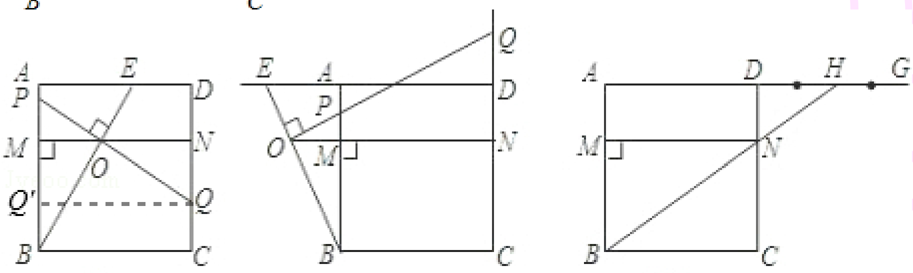
∵Q′P=MP+Q′M=MP+NQ，∴AE=MP+NQ．（6 分）

（2）如图②，若点 E 在 DA 的延长线上时，结论 AE=QN﹣MP．（8 分）

（3）如图，若点 E_1 在线段 DH 上时，结论：$AE_1=MP_1+NQ_1$．（10 分）

若点 E_2 在射线 HG 上时，结论：$AE_2=MP_2-NQ_2$．（12 分）





图① 图② 图③

84．（1）证明：∵四边形 ABCD 是正方形，∴DA=DC，∠1=∠2=45°，DE=DE，

∴△ADE≌△CDE．

（2）证明：∵△ADE≌△CDE，∴∠3=∠4，

∵CH⊥CE，∴∠4+∠5=90°，

又∵∠6+∠5=90°，∴∠4=∠6=∠3，

∵AD∥BG，∴∠G=∠3，∴∠G=∠6，∴CH=GH，

又∵∠4+∠5=∠G+∠7=90°，∴∠5=∠7，∴CH=FH，∴FH=GH．

（3）解：存在符合条件的 x 值此时 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

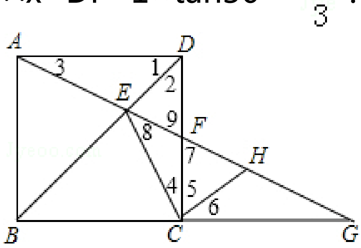
∵∠ECG＞90°，要使△ECG 为等腰三角形，必须 CE=CG，

∴∠G=∠8，

又∵∠G=∠4，∴∠8=∠4，∴∠9=2∠4=2∠3，∴∠9+∠3=2∠3+∠3=90°，

∴∠3=30°，

∴x=DF=1×tan30°=$\frac{\sqrt{3}}{3}$．



85．(1)证明：如图 1，过点 F 作 $FM\perp AB$ 于点 M，在正方形 ABCD 中，$AC\perp BD$ 于点 E．

$\therefore AE=\frac{1}{2}AC$，$\angle ABD=\angle CBD=45°$，

$\because AF$ 平分$\angle BAC$，$\therefore EF=MF$，

又$\because AF=AF$，$\therefore Rt\triangle AMF\cong Rt\triangle AEF$，$\therefore AE=AM$，

$\because\angle MFB=\angle ABF=45°$，$\therefore MF=MB$，$MB=EF$，$\therefore EF+\frac{1}{2}AC=MB+AE=MB+AM=AB$．

(2) E_1F_1，$\frac{1}{2}A_1C_1$ 与 AB 三者之间的数量关系：$E_1F_1+\frac{1}{2}A_1C_1=AB$

证明：如图 2，连接 F_1C_1，过点 F_1 作 $F_1P\perp A_1B$ 于点 P，$F_1Q\perp BC$ 于点 Q，

$\because A_1F_1$ 平分$\angle BA_1C_1$，$\therefore E_1F_1=PF_1$；同理 $QF_1=PF_1$，$\therefore E_1F_1=PF_1=QF_1$，

又$\because A_1F_1=A_1F_1$，$\therefore Rt\triangle A_1E_1F_1\cong Rt\triangle A_1PF_1$，$\therefore A_1E_1=A_1P$，

同理 $Rt\triangle QF_1C_1\cong Rt\triangle E_1F_1C_1$，$\therefore C_1Q=C_1E_1$，

由题意：$A_1A=C_1C$，$\therefore A_1B+BC_1=AB+A_1A+BC-C_1C=AB+BC=2AB$，

$\because PB=PF_1=QF_1=QB$，

$\therefore A_1B+BC_1=A_1P+PB+QB+C_1Q=A_1P+C_1Q+2E_1F_1$，

即 $2AB=A_1E_1+C_1E_1+2E_1F_1=A_1C_1+2E_1F_1$，$\therefore E_1F_1+\frac{1}{2}A_1C_1=AB$．

(3)解：设 $PB=x$，则 $QB=x$，

$\because A_1E_1=3$，$QC_1=C_1E_1=2$，

$Rt\triangle A_1BC_1$ 中，$A_1B^2+BC_1^2=A_1C_1^2$，

即 $(3+x)^2+(2+x)^2=5^2$，$\therefore x_1=1$，$x_2=-6$（舍去），$\therefore PB=1$，$\therefore E_1F_1=1$，

又$\because A_1C_1=5$，

由(2)的结论：$E_1F_1+\frac{1}{2}A_1C_1=AB$，$\therefore AB=\frac{7}{2}$，$\therefore BD=\frac{7}{2}\sqrt{2}$．

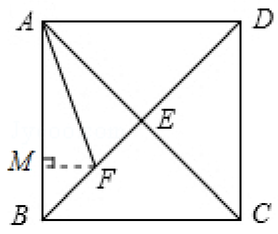


图1

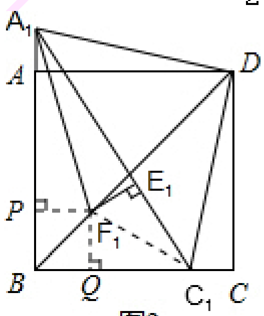


图2

86．解：（1）∵正方形 ABCD 中，AH=2，∴DH=4，

∵DG=2，∴HG=$2\sqrt{5}$，即菱形 EFGH 的边长为 $2\sqrt{5}$．

在△AHE 和△DGH 中，

∵∠A=∠D=90°，AH=DG=2，EH=HG=$2\sqrt{5}$，∴△AHE≌△DGH（HL），

∴∠AHE=∠DGH，

∵∠DGH+∠DHG=90°，∴∠DHG+∠AHE=90°，∴∠GHE=90°，即菱形 EFGH 是正方形，

同理可以证明△DGH≌△CFG，

∴∠FCG=90°，即点 F 在 BC 边上，同时可得 CF=2，

从而 $S_{\triangle FCG}=\frac{1}{2}\times4\times2=4$．（2 分）

（2）作 FM⊥DC，M 为垂足，连接 GE，

∵AB∥CD，∴∠AEG=∠MGE，

∵HE∥GF，∴∠HEG=∠FGE，∴∠AEH=∠MGF．

在△AHE 和△MFG 中，

$\begin{cases}\angle A=\angle M\\ \angle AEH=\angle FGM\\ HE=FG\end{cases}$∴△AHE≌△MFG（AAS），∴FM=HA=2，

即无论菱形 EFGH 如何变化，点 F 到直线 CD 的距离始终为定值 2．

因此 $S_{\triangle FCG}=\frac{1}{2}\times2\times(6-x)=6-x$．（6 分）

（3）若 $S_{\triangle FCG}=1$，由（2）知 $S_{\triangle FCG}=6-x$，得 x=5，

∴在△DGH 中，HG=$\sqrt{41}$，

∴在△AHE 中，AE=$\sqrt{37}>6$，即点 E 已经不在边 AB 上．

∴不可能有 $S_{\triangle FCG}=1$．（9 分）

另法：∵点 G 在边 DC 上，∴菱形的边长至少为 DH=4，

当菱形的边长为 4 时：

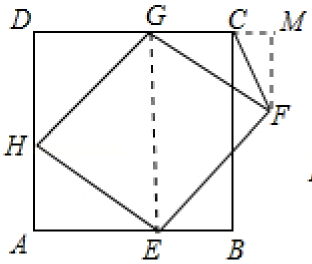
∵点 E 在 AB 边上且满足 AE=$2\sqrt{3}$，此时，当点 E 逐渐向右运动至点 B 时，HE 的长（即菱形的边长）将逐渐变大，∴最大值为 HE=$2\sqrt{10}$．

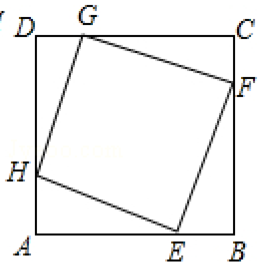
此时，DG=$2\sqrt{6}$，故 $0\le x\le2\sqrt{6}$．

∵函数 $S_{\triangle FCG}=6-x$ 的值随着 x 的增大而减小，

∴当 x=$2\sqrt{6}$时，$S_{\triangle FCG}$ 取得最小值为 $6-2\sqrt{6}$．

又∵$6-2\sqrt{6}>6-2\sqrt{6.25}=1$，∴△FCG 的面积不可能等于 1．（9 分）





87．解：(1) ∵DF=CE，AD=DC，且∠ADF=∠DCE，

∴△DEC≌△AFD；∴结论①、②成立（1 分）

(2) 结论①、②仍然成立．理由为：

∵四边形 ABCD 为正方形，∴AD=DC=CB 且∠ADC=∠DCB=90°，

在 Rt△ADF 和 Rt△ECD 中

$$\begin{cases} AD=DC \\ \angle ADC=\angle DCB \\ CE=DF \end{cases}，$$

∴Rt△ADF≌Rt△ECD（SAS），（3 分）∴AF=DE，∴∠DAF=∠CDE，

∵∠ADE+∠CDE=90°，∴∠ADE+∠DAF=90°，∴∠AGD=90°，∴AF⊥DE；（5 分）

(3) 结论：四边形 MNPQ 是正方形（6 分）

证明：∵AM=ME，AQ=QD，

∴MQ∥DE 且 MQ=$\frac{1}{2}$DE，

同理可证：PN∥DE，PN=$\frac{1}{2}$DE；MN∥AF，MN=$\frac{1}{2}$AF；PQ∥AF，PQ=$\frac{1}{2}$AF；

∵AF=DE，∴MN=NP=PQ=QM，

∴四边形 MNPQ 是菱形，（8 分）

又∵AF⊥DE，

∴∠MQP=90°，

∴四边形 MNPQ 是正方形．（10 分）

88．(1) 证明：在△BCE 与△DCF 中，

$$\begin{cases} BC=DC \\ \angle BCE=\angle DCF=90^\circ \\ CE=CF \end{cases}，∴△BCE≌△DCF．$$

(2) 解：OG=$\frac{1}{2}$BF．

理由如下：∵△BCE≌△DCF，∴∠CEB=∠F，

∵∠CEB=∠DEG，∴∠F=∠DEG，

∵∠F+∠GDE=90°，∴∠DEG+∠GDE=90°，

$\therefore BG\perp DF$，$\therefore\angle BGD=\angle BGF$，

又$\because BG=BG$，$\angle DBG=\angle FBG$，$\therefore\triangle BGD\cong\triangle BGF$，$\therefore DG=GF$，

$\because O$为正方形 ABCD 的中心，$\therefore DO=OB$，$\therefore OG$是$\triangle DBF$的中位线，

$\therefore OG=\frac{1}{2}BF$．

（3）解：设 $BC=x$，则 $DC=x$，$BD=\sqrt{2}x$，

由（2）知，$\triangle BGF\cong\triangle BGD$，

$\therefore BF=BD$，

$\therefore CF=(\sqrt{2}-1)x$，

$\because\angle DGB=\angle EGD$，$\angle DBG=\angle EDG$，

$\therefore\triangle GDB\backsim\triangle GED$，

$\therefore\frac{GD}{GE}=\frac{GB}{GD}$，

$\therefore GD^2=GE\bullet GB=4-2\sqrt{2}$，

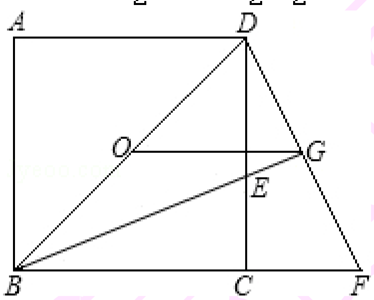
$\because DC^2+CF^2=(2GD)^2$，

$\therefore x^2+(\sqrt{2}-1)^2x^2=4(4-2\sqrt{2})$，

$(4-2\sqrt{2})x^2=4(4-2\sqrt{2})$，

$x^2=4$，正方形 ABCD 的面积是 4 个平方单位．

$\therefore S_{\triangle DBG}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}x^2=\sqrt{2}$个平方单位．



89．证法一：$\because$正方形 ABCD 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，

$\therefore BC=CD$，$\angle CBE=\angle DCF=45°$．

又已知 $BE=CF$，

故$\triangle CBE\cong\triangle DCF$，$\therefore\angle CEB=\angle DFC$，$CE=DF$，

从而$\angle OEC=\angle OFD$．

证法二：$\because$正方形 ABCD 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，

$\therefore BO=OC=OD$，$\angle EOC=\angle FOD=90°$．

又$\because BE=CF$，$\therefore OE=OF$，

故$\triangle EOC\cong\triangle FOD$，$\therefore\angle OEC=\angle OFD$，$CE=DF$．

90．解：（1）BG=EH．

∵四边形 ABCD 和 CDFE 都是正方形，∴DC=DF，∠DCG=∠DFH=∠FDC=90°，

∵∠CDG+∠CDH=∠FDH+∠HDC=90°，∴∠CDG=∠FDH，

在△CDG 和△FDH 中

$$\begin{cases}\angle F=\angle DCG\\ DF=DC\\ \angle FDH=\angle CDG\end{cases}$$

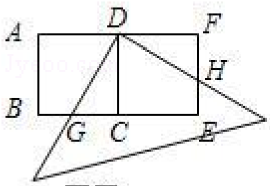
∴△CDG≌△FDH（ASA），∴CG=FH，

∵BC=EF，∴BG=EH．

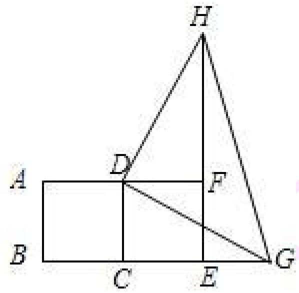
（2）结论 BG=EH 仍然成立．

同理可证△CDG≌△FDH，∴CG=FH，

∵BC=EF，∴BC+CG=EF+FH，∴BG=EH．



图甲



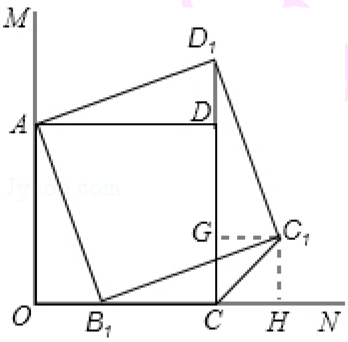
图乙

91．（1）证明：∵$\angle D_1AD+\angle B_1AD=90°$，$\angle OAB_1+\angle B_1AD=90°$，

∴$\angle B_1AO=\angle D_1AD$，

∵$AD_1=AB_1$，$AO=AD$，

∴$\triangle OAB_1\cong\triangle DAD_1$，∴$\angle D_1DA=\angle O=90°$；（$D_1$，D，C 在同一条直线上）．



（2）解：猜想$\angle C_1CN=45°$．

证明：作 $C_1H\perp ON$ 于 H．作 $C_1G\perp CD_1$ 于 G；

则有 $C_1G=CH$．

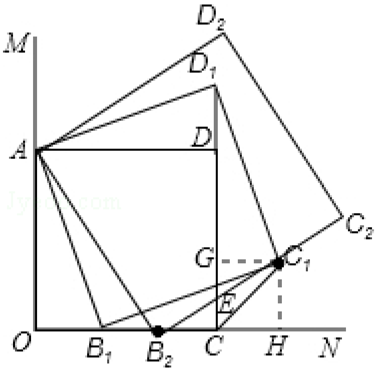
∵$\angle C_1D_1C+\angle AD_1D=90°$，$\angle C_1B_1H+\angle AB_1O=90°$∴$\angle C_1D_1C=\angle C_1B_1H$，

∵$C_1D_1=B_1C_1$，$\angle D_1C_1E=\angle C_1HB_1=90°$，∴$\triangle C_1GD_1\cong\triangle C_1B_1H$，

∴$C_1G=C_1H$，

又∵$CH=C_1G$，

∴直角三角形 CHC_1 是个等腰直角三角形，∴$\angle C_1CN=45°$．



（3）解：作图；

得$\angle ADD_2=90°$（$\angle ADD_2=90°$、$\angle C_2CN=45°$均可）．

92．解：（1）由七巧板性质可知，BI=IC=CH=HE．（字母 I 就是字母 P）

又∵$S_{\triangle BIC}=1$，$\angle BIC=90°$，

∴$\frac{1}{2}BI\bullet IC=1$，∴$BI=IC=\sqrt{2}$，∴$BC=\sqrt{BI^2+IC^2}=2$．

∴AB+BC+CH+HE=2BC+BC+BI+BI

=3BC+2BI

$=3\times2+2\times\sqrt{2}$

$=6+2\sqrt{2}\approx6+2.828\approx8.83$．

即蚂蚁沿 A→B→C→H→E 所走的路线的总长为 8.83．

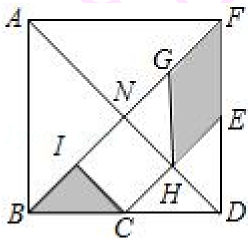
（2）方法一：

∵EF=BC=2，$FG=EH=BI=\sqrt{2}$，∴点 G 到 EF 的距离为：$\sqrt{2}\sin45°$，

∴平行四边形 EFGH 的面积$=EF\bullet\sqrt{2}\sin45°=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$．

方法二：

连接 GE，则可知平行四边形 EFGH 的面积为$=2S_{\triangle BIC}=2$．



93．(1) 证明：∵四边形 ABCD 是正方形．

∴$\angle BOE=\angle AOF=90°$，$OB=OA$．

又∵$AM\perp BE$，∴$\angle MEA+\angle MAE=90°=\angle AFO+\angle MAE$，

∴$\angle MEA=\angle AFO$．∴$\triangle BOE\cong\triangle AOF$．∴$OE=OF$．

(2) 解：$OE=OF$ 成立．

证明：∵四边形 ABCD 是正方形，∴$\angle BOE=\angle AOF=90°$，$OB=OA$．

又∵$AM\perp BE$，∴$\angle F+\angle MBF=90°$，

$\angle E+\angle OBE=90°$，

又∵$\angle MBF=\angle OBE$，∴$\angle F=\angle E$．∴$\triangle BOE\cong\triangle AOF$．∴$OE=OF$．

94．

解答：(1) 证明：在图 1 中，过点 A 作 GH 的平行线，交 DC 于点 H′，交 BE 于点 O'．

∵ABCD 是正方形，∴$\angle D=90°$，$\angle H'AD+\angle AH'D=90°$．

∵$GH\perp BE$，$AH'\parallel GH$，∴$AH'\perp BE$．∴$\angle H'AD+\angle BEA=90°$．

∴$\angle BEA=\angle AH'D$．

在$\triangle BAE$和$\triangle ADH'$中，$\begin{cases}\angle BAE=\angle D\\ \angle BEA=\angle AH'D\\ BA=AD\end{cases}$，

∴$\triangle BAE\cong\triangle ADH'$（AAS），∴$BE=AH'=GH$；

(2) 解：$EF=GH$，理由如下：

过 E 作 $EM\perp BC$，过 G 作 $GN\perp CD$，∴$\angle EMF=\angle GNH=90°$，

又 $GH\perp EF$，∴$\angle EOG=\angle GOF=90°$，

∴$\angle MEF+\angle EQG=90°$，$\angle NGH+\angle EQG=90°$，

∴$\angle MEF=\angle NGH$，又 $GN=EM$，∴$\triangle EMF\cong\triangle GNH$，∴$EF=GH$；

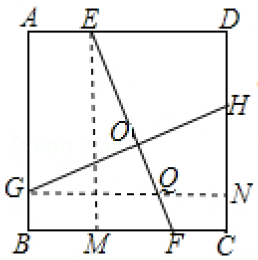
(3) 解：相等．

证明：在图 3 中，过点 A 作 m 的平行线交 BC 于点 F′，过点 D 作 n 的平行线交 AB 于点 G′．

则有 $EF=AF'$，$G'D=GH$，

由 (1) 可知，$Rt\triangle ABF'\cong Rt\triangle DAG'$，∴$AF'=DG'$．

从而可证明 $EF=GH$．



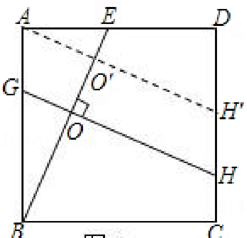


图 1

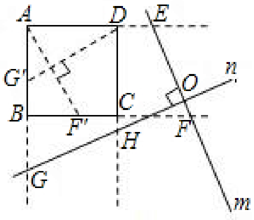


图 3

95．解：(1) 猜想：AF=BD 且 AF⊥BD．(1 分)

证明：设 AF 与 DC 交于点 G．

∵FC=DC，AC=BC，∠BCD=∠BCA+∠ACD，

∠ACF=∠DCF+∠ACD，∠BCA=∠DCF=90°，∴∠BCD=∠ACF．

∴△ACF≌△BCD．∴AF=BD．(4 分) ∴∠AFC=∠BDC．

∵∠AFC+∠FGC=90°，∠FGC=∠DGA，∴∠BDC+∠DGA=90 度．

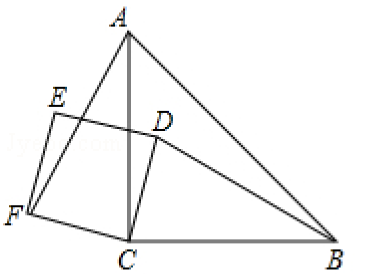
∴AF⊥BD．(7 分) ∴AF=BD 且 AF⊥BD．

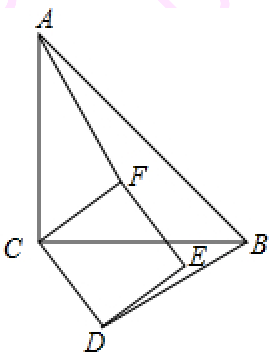
(2) 结论：AF=BD 且 AF⊥BD．

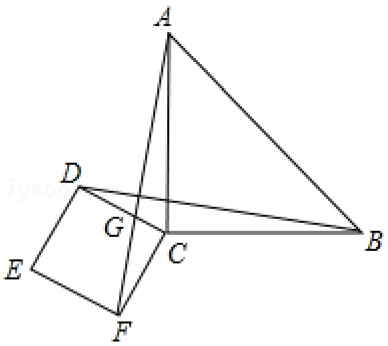
图形不惟一，只要符合要求即可．

画出图形得（1 分），写出结论得（1 分），此题共（2 分）. 如：

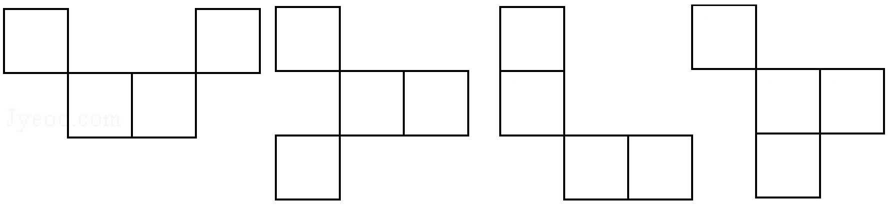
①CD 边在△ABC 的内部时；②CF 边在△ABC 的内部时．







96．解：参考图如下图：



97．证明：∵四边形 ABCD 为正方形，

∴AB=AD=CD，∠D=∠BAE=90°，

∴∠EAH+∠BAH=90°

∵AH⊥BE，∴∠AHB=90°，∴∠ABH+∠BAH=90°，∴∠DAF=∠ABE．（1 分）

在△ADF 与△BAE 中，有$\begin{cases}\angle DAF=\angle ABE \\ AD=BA \\ \angle D=\angle BAE\end{cases}$，

∴△ADF≌△BAE．（1 分）∴AE=DF．（1 分）∴AD﹣AE=CD﹣DF，

即 DE=CF．（1 分）

98．解：正△PAE 的顶点 P 在正方形内按图 1 中所示的方式连续地翻转，顶点 P 第一次回到原来的起始位置，实际上正方形周长和与三角形的周长和相等，正方形的周长=4k，三角形的周长=3，即找 4k，3 的最小公倍数；

（1）当 k=1 时，4k，3 的最小公倍数是 12，故 n=12；

（2）当 k=2 时，4k，3 的最小公倍数是 24，故 n=24；当 k=3 时，4k，3 的最小公倍数是 12，故 n=12；

（3）当 k 是 3 的倍数时 n=4k，当 k 不是 3 的倍数时 n=12k．

99．解：（1）∵EF⊥AC，AB⊥BC，AE 平分∠BAC，∴BE=EF；

∵在 Rt△CEF 中，∠ECF=45°，∴FE=CF，∴BE=CF．故答案为：是．

（2）正方形 ABCD 的边长为 1cm，对角线 AC=$\sqrt{2}$cm，

由（1）得，BE=EF=CF=AC﹣AF=AC﹣AB=（$\sqrt{2}$﹣1）cm．

故答案为：$\sqrt{2}-1$．

100．证明：∵四边形 ABCD 是正方形，（1 分）

∴AC⊥BD，即∠AOB=∠BOC=90°，（2 分）∴BO=OC，（3 分）

∵∠OCF=∠OBE，（4 分）∴△OCF≌△OBE，（5 分）∴OE=OF．（5 分）

101. 解：（1）①DE=EF；

②NE=BF；

③∵四边形 ABCD 为正方形，

∴AD=AB，∠DAB=∠ABC=90°，

∵N，E 分别为 AD，AB 中点，∴$AN=DN=\frac{1}{2}AD$，$AE=EB=\frac{1}{2}AB$，∴DN=BE，AN=AE，

∵∠DEF=90°，∴∠AED+∠FEB=90°，

又∵∠ADE+∠AED=90°，∴∠FEB=∠ADE，

又∵AN=AE，

∴∠ANE=∠AEN，

又∵∠A=90°，

∴∠ANE=45°，

∴∠DNE=180°－∠ANE=135°，

又∵∠CBM=90°，BF 平分∠CBM，

∴∠CBF=45°，∠EBF=135°，

在△DNE 和△EBF 中

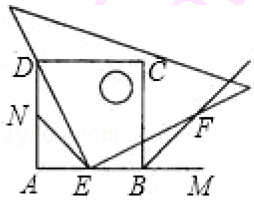
$\begin{cases}\angle ADE=\angle FEB\\ DN=EB\\ \angle DNE=\angle EBF\end{cases}$，∴△DNE≌△EBF（ASA），∴DE=EF，NE=BF．

（2）在 DA 上截取 DN=EB（或截取 AN=AE），

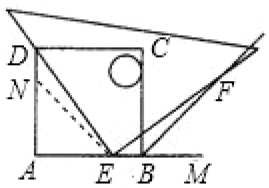
连接 NE，则点 N 可使得 NE=BF．

此时 DE=EF．

证明方法同（1），证△DNE≌△EBF（ASA）．



(1)



(2)

102．证明：关系是：MD=MF，MD⊥MF

如图，延长 DM 交 CE 于点 N，连接 FD、FN

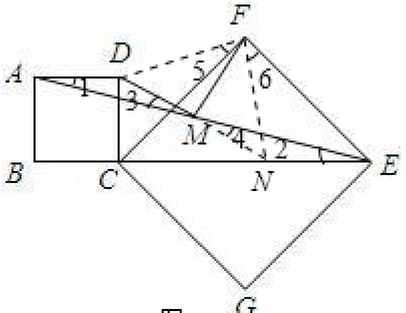


图1

∵正方形 ABCD，

∴AD∥BE，AD=DC，

∴∠1=∠2

又∵AM=EM，∠3=∠4

∴△ADM≌△ENM

∴AD=EN，MD=MN

∵AD=DC，∴DC=NE

又∵正方形 CGEF，∴∠FCE=∠NEF=45°，FC=FE，∠CFE=90°

又∵正方形 ABCD，∴∠BCD=90°．∴∠DCF=∠NEF=45°

∴△FDC≌△FNE

∴FD=FN，∠5=∠6

∵∠CFE=90°，∴∠DFN=90°

又∵DM=MN=$\frac{1}{2}$DN，

∴M 为 DN 的中点，

∴FM=$\frac{1}{2}$DN，

∴MD=MF，DM⊥MF

思路一：∵四边形 ABCD、CGEF 是正方形，

∴AB=BC=CD=AD，∠B=∠BCD=∠CDA=∠BAD=90°

CF=EF=EG=CG，∠G=∠GEF=∠EFC=∠FCG=90°，∠FCE=∠FEC=45°

∴∠DCF=∠FEC

思路二：

延长 DM 交 CE 于 N，∵四边形 ABCD、CGEF 是正方形

∴AD∥CE，∴∠DAM=∠NEM

又∵∠DMA=∠NME，AM=EM，∴△ADM≌△ENM

思路三：∵正方形 CGEF，

∴∠FCE=∠FEC=45°

又∵正方形ABCD，

∴∠DCB=90°．

∴∠DCF=180°-∠DCB-∠FCE=45°，∠DCF=∠FEC=45°

选取条件①

证明：如图

∵正方形ABCD，

∴AD∥BE，AD=DC，∴∠1=∠2

∵AD=NE，∠3=∠4，∴△ADM≌△ENM

∴MD=MN

又∵AD=DC，

∴DC=NE

又∵正方形CGEF，

∴FC=FE，∠FCE=∠FEN=45°．

∴∠FCD=∠FEN=45°

∴△FDC≌△FNE

∴FD=FN，∠5=∠6，

∴∠DFN=∠CFE=90°

∴MD=MF，MD⊥MF

选取条件②

证明：如图，

延长DM交FE于N

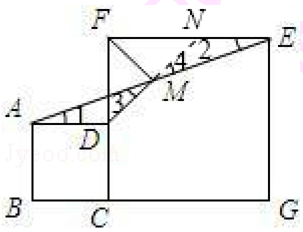


图2

∵正方形ABCD、CGEF

∴CF=EF，AD=DC，∠CFE=90°，AD∥FE．

∴∠1=∠2

又∵MA=ME，∠3=∠4，

∴△AMD≌△EMN

∴MD=MN，AD=EN．

∵AD=DC，

∴$DC=NE$

又∵$FC=FE$，∴$FD=FN$

又∵$\angle DFN=90^\circ$，∴$FM\perp MD$，$MF=MD$．

选取条件③

证明：如图，

延长 DM 交 FE 于 N．

∵正方形 ABCD、CGEF∴$CF=EF$，$AD=DC$，$\angle CFE=90^\circ$，$AD\parallel FE$

∴$\angle 1=\angle 2$

又∵$MA=ME$，$\angle 3=\angle 4$，∴$\triangle AMD\cong\triangle EMN$∴$AD=EN$，$MD=MN$．

∵$CF=2AD$，$EF=2EN$

∴$FD=FN$．又∵$\angle DFN=90^\circ$，

∴$MD=MF$，$MD\perp MF$

附加题：

证明：如图

过点 E 作 AD 的平行线分别交 DM、DC 的延长线于 N、H，连接 DF、FN

则$\angle ADC=\angle H$，$\angle 3=\angle 4$．

∵$AM=ME$，$\angle 1=\angle 2$，∴$\triangle ADM\cong\triangle ENM$∴$DM=NM$，$AD=EN$．

∵正方形 ABCD、CGEF

∴$AD=DC$，$FC=FE$，$\angle ADC=\angle FCG=\angle CFE=90^\circ$，$CG\parallel FE$

∴$\angle H=90^\circ$，$\angle 5=\angle NEF$，$DC=NE$

∴$\angle DCF+\angle 7=\angle 5+\angle 7=90^\circ$

∴$\angle DCF=\angle 5=\angle NEF$

∵$FC=FE$，∴$\triangle DCF\cong\triangle NEF$∴$FD=FN$，$\angle DFC=\angle NFE$．

∵$\angle CFE=90^\circ$∴$\angle DFN=90^\circ$．∴$DM=FM$，$DM\perp FM$．

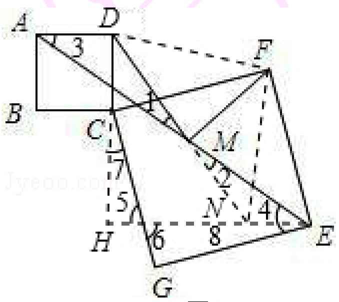


图3

103．(1)证明：连接 AD

∵△ABC 是等腰直角三角形，D 是 BC 的中点∴AD⊥BC，AD=BD=DC，∠DAQ=∠B，

在△BPD 和△AQD 中，

$\begin{cases} BD=AD \\ \angle DBP=\angle DAQ \\ BP=AQ \end{cases}$，∴△BPD≌△AQD(SAS)，∴PD=QD，∠ADQ=∠BDP，

∵∠BDP+∠ADP=90°∴∠ADP+∠ADQ=90°，即∠PDQ=90°，

∴△PDQ 为等腰直角三角形；

(2)解：当 P 点运动到 AB 的中点时，四边形 APDQ 是正方形；理由如下：

∵∠BAC=90°，AB=AC，D 为 BC 中点，

∴AD⊥BC，AD=BD=DC，∠B=∠C=45°，∴△ABD 是等腰直角三角形，

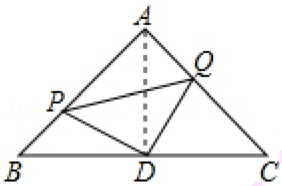
当 P 为 AB 的中点时，DP⊥AB，即∠APD=90°，

又∵∠A=90°，∠PDQ=90°，

∴四边形 APDQ 为矩形，

又∵DP=AP=$\frac{1}{2}$AB，

∴矩形 APDQ 为正方形(邻边相等的矩形为正方形)．



104．解：(1)四边形 EGFH 是平行四边形；

证明：∵▱ABCD 的对角线 AC、BD 交于点 O，

∴点 O 是▱ABCD 的对称中心；∴EO=FO，GO=HO；

∴四边形 EGFH 是平行四边形；

(2)∵四边形 EGFH 是平行四边形，EF⊥GH，

∴四边形 EGFH 是菱形；

(3)菱形；

由(2)知四边形 EGFH 是菱形，

当 AC=BD 时，对四边形 EGFH 的形状不会产生影响；

(4)四边形 EGFH 是正方形；

证明：∵AC=BD，∴▱ABCD 是矩形；

又∵AC⊥BD，∴▱ABCD 是正方形，

∴∠BOC=90°，∠GBO=∠FCO=45°，OB=OC；

∵$EF\perp GH$，∴$\angle GOF=90°$；

$\angle BOG+\angle BOF=\angle COF+\angle BOF=90°$∴$\angle BOG=\angle COF$；

∴$\triangle BOG\cong\triangle COF$（ASA）；∴$OG=OF$，同理可得：$EO=OH$，∴$GH=EF$；

由（3）知四边形 EGFH 是菱形，

又 $EF=GH$，∴四边形 EGFH 是正方形．

105．解：(1) $OE=OF$．

证明如下：

∵CE 是$\angle ACB$的平分线，∴$\angle 1=\angle 2$．

∵$MN\parallel BC$，∴$\angle 1=\angle 3$．∴$\angle 2=\angle 3$．∴$OE=OC$．

同理可证 $OC=OF$．∴$OE=OF$．(3 分)

（2）四边形 BCFE 不可能是菱形，若四边形 BCFE 为菱形，则 $BF\perp EC$，

而由（1）可知 $FC\perp EC$，在平面内过同一点 F 不可能有两条直线同垂直于一条直线．(3 分)

（3）当点 O 运动到 AC 中点时，且$\triangle ABC$是直角三角形（$\angle ACB=90°$）时，四边形 AECF 是正方形．

理由如下：

∵O 为 AC 中点，∴$OA=OC$，

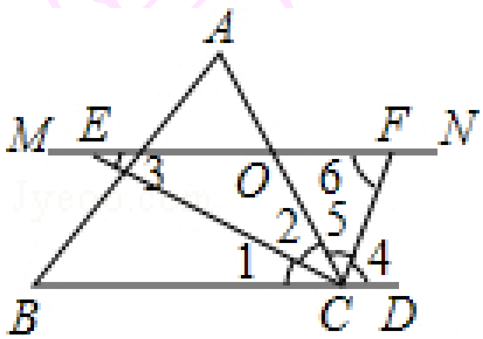
∵由（1）知 $OE=OF$，∴四边形 AECF 为平行四边形；

∵$\angle 1=\angle 2$，$\angle 4=\angle 5$，$\angle 1+\angle 2+\angle 4+\angle 5=180°$，

∴$\angle 2+\angle 5=90°$，即$\angle ECF=90°$，∴▱AECF 为矩形，

又∵$AC\perp EF$．∴▱AECF 是正方形．

∴当点 O 为 AC 中点且$\triangle ABC$是以$\angle ACB$为直角三角形时，四边形 AECF 是正方形．(3 分)



106．证明：(1) ∵DE⊥AB，DF⊥AC，

∴∠BED=∠CFD=90°．

∵AB=AC，

∴∠B=∠C．

∵D 是 BC 的中点，

∴BD=CD．

∴△BED≅△CFD．

(2) ∵DE⊥AB，DF⊥AC，

∴∠AED=∠AFD=90°．

∵∠A=90°，

∴四边形 DFAE 为矩形．

∵△BED≅△CFD，

∴DE=DF．

∴四边形 DFAE 为正方形．

107．(1) 证明：∵AC 与 BD 相交于点 O，∴∠AOB=∠COD，(1 分)

在△AOB 和△COD 中，$\begin{cases}\angle BAO=\angle DCO\\ \angle AOB=\angle COD\\ OB=OD\end{cases}$ ∴△AOB≅△COD，(2 分) ∴OA=OC，(3 分)

∵OA=OC，OB=OD，∴四边形 ABCD 为平行四边形 (4 分)

(2) 解：四边形 ABCD 是菱形．(5 分)

因为对角线互相垂直平分的四边形是菱形．(6 分)

(或对角线互相垂直的平行四边形是菱形)

(3) 解：四边形 A_1BC_1D 是正方形 (7 分)

因为对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形．(8 分)

(或对角线相等的菱形是正方形)

108．(1) 解：△ABC≅△BAD．

证明：∵AD=BC，∠ABC=∠BAD=90°，AB=BA，

∴△ABC≅△BAD (SAS)．

(2) 证明：∵AH∥GB，BH∥GA，

∴四边形 AHBG 是平行四边形．

∵△ABC≅△BAD，

∴∠ABD=∠BAC．

∴GA=GB．

∴平行四边形 AHBG 是菱形．

（3）解：需要添加的条件是 AB=BC．

109．解：(1)四边形 EFGH 是正方形．(1 分)

证明：∵四边形 ABCD 是正方形，

∴∠A=∠B=∠C=∠D=90°，AB=BC=CD=DA，

∵HA=EB=FC=GD，

∴AE=BF=CG=DH，(2 分)

∴△AEH≌△BFE≌△CGF≌△DHG，(3 分)

∴EF=FG=GH=HE，(4 分)

∴四边形 EFGH 是菱形，(5 分)

∵△DHG≌△AEH，

∴∠DHG=∠AEH，

∵∠AEH+∠AHE=90°，∴∠DHG+∠AHE=90°，∴∠GHE=90°，(6 分)

∴四边形 EFGH 是正方形．(7 分)

（2）∵HA=EB=FC=GD=1，AB=BC=CD=AD=3，∴GF=EF=EH=GH=$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

∵由（1）知，四边形 EFGH 是正方形，∴GO=OF，∠GOF=90°，

由勾股定理得：GO=OF=$\frac{\sqrt{10}}{2}$，

∵$S_{\text{四边形 FCGO}}=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{9}{4}$，

∴$S_{\text{阴影}}=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-S_{\text{四边形 FCGO}}\times4=10-9=1$．

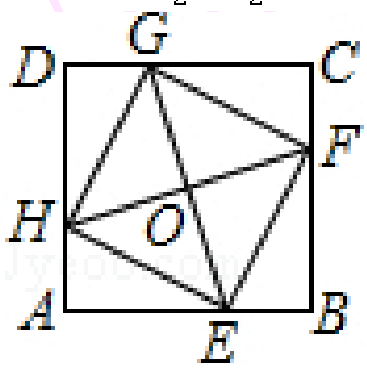


图2

110．(1) 证明：∵AB=BC=CD=DA，AE=BF=CG=DH，

∴EB=FC=GD=HA，

∵∠A=∠B=∠C=∠D=90°，

∴△AEH≌△BFE≌△CGF≌△DHG，(2 分)

∴HE=EF=FG=GH，∠1=∠2，(3 分)

∴四边形 EFGH 是菱形，(4 分)

∵∠1+∠3=90°，

∴∠2+∠3=90°，

∴∠4=90°，

∴四边形 EFGH 是正方形；(5 分)

(2) 解：如图，设原正方形为 ABCD，正方形 EFGH 是要裁下的正方形，且 EH 过点 P．

设 AH=x，则 AE=1 - x．

∵MP∥AH，

∴$\frac{\frac{1}{6}}{x}=\frac{1-x-\frac{1}{4}}{1-x}$，(6 分)

整理得 $12x^2-11x+2=0$，

解得 $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{2}{3}$，(7 分)

当 $x=\frac{1}{4}$时，$S_{正方形EFGH}=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{8}$，

当 $x=\frac{2}{3}$时，$S_{正方形EFGH}=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}<\frac{5}{8}$，

∴当 BE=DG=$\frac{1}{4}$米，BF=DH=$\frac{3}{4}$米时，裁下正方形面积最大，面积为$\frac{5}{8}$米^2．(9 分)

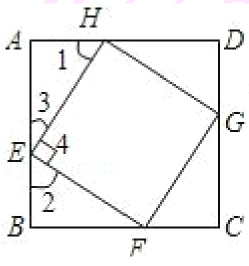


图2

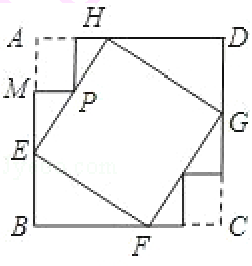


图1

111．解：(1)①证明：由作图的过程可知四边形 MNED 是矩形．

在 Rt△ADM 与 Rt△CDE 中，

∵AD=CD，又∠ADM+∠MDC=∠CDE+∠MDC=90°，

∴DM=DE

∴四边形 MNED 是正方形．

∵$DE^2=CD^2+CE^2=a^2+b^2$，

∴正方形 MNED 的面积为 a^2+b^2；

②过点 N 作 NP⊥BE，垂足为 P，如图

可以证明图中 6 与 5 位置的两个三角形全等，4 与 3 位置的两个三角形全等，2 与 1 位置的两个三角形也全等．

所以将 6 放到 5 的位置，4 放到 3 的位置，2 放到 1 的位置，恰好拼接为正方形 MNED．

(2)答：能．

理由是：由上述的拼接过程可以看出：对于任意的两个正方形都可以拼接为一个正方形，而拼接出的这个正方形可以与第三个正方形在拼接为一个正方形，依此类推．由此可知：对于 n 个任意的正方形，可以通过（n - 1）次拼接，得到一个正方形．

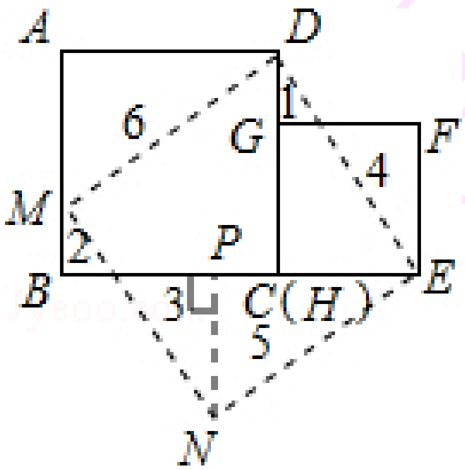
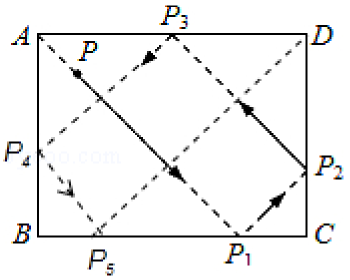
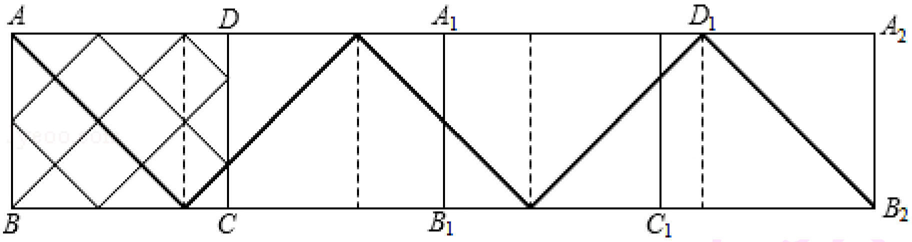


图2

112. 解：（1）5；



（2）$24\sqrt{2}$；解题思路示意图：



（2）AB：AD=4：5．

113．解：（1）如图；

（2）PP_2与 AB 平行且相等．

证明：设 PP_1分别交 l_1、l_2于点 O_1、O_2，

∵P、P_1关于 l_1对称，点 P_2在 PP_1上，

∴$PP_2 \perp l_1$

又∵$AB \perp l_1$

∴$PP_2 \parallel AB$

∵$l_1 \perp AB$，$l_2 \perp AB$

∴$l_1 \parallel l_2$

∴四边形 O_1AMO_2是矩形∴$O_1O_2=AM=a$∴P、P_1关于 l_1对称，$P_1O_1=PO_1=b$

∵P_1、P_2关于 l_2对称

∴$P_2O_2=P_1O_2=P_1O_1-O_1O_2=b-a$

∴$PP_2=PP_1-P_1P_2=PP_1-2P_2O_2=2b-2(b-a)=2a$

∴$PP_2 \overset{\parallel}{=} AB$．